Universität Hamburg

Department Mathematik
Schwerpunkt Differentialgleichungen
und Dynamische Systeme
Philipp Sprüssel
Jan Henrik Sylvester
Klaus Sielaff

UHH · Dpt. Mathematik · SP DD · Bundesstraße 55 · 20146 Hamburg

An die
Teilnehmerinnen und Teilnehmer des
Internationalen Städtewettbewerbs
Mathematik

Hamburg, den 8. Februar 2010

Tel. (040) 428 38-5123 Fax (040) 428 38-5117
E-Mail: stw.m.hh@gmail.com

31. Internationaler Städtewettbewerb Mathematik 2009/2010

Liebe Schülerinnen, liebe Schüler!

Hiermit laden wir euch herzlich ein, an dem oben genannten Wettbewerb teilzunehmen. Wie ihr sicher wisst, gibt es seit vielen Jahren neben der Mathematik-Olympiade einen mathematischen Wettbewerb zwischen Schülermannschaften aus verschiedenen Städten. Hieran nehmen Städte aus etlichen verschiedenen Nationen teil, seit 1989 auch eine Mannschaft aus Hamburg. Der Wettbewerb ist geeignet für Schüler ab der 8. Klasse. Eine vorherige Anmeldung ist nicht nötig.

Die Frühjahrsrunde 2010 findet statt am

Mittwoch, den 3. März 2010 um 9:00 Uhr
im Hörsaal H1 des Geomatikums
Bundesstraße 55, 20146 Hamburg.

Die Treffzeit ist 8:45 Uhr vor dem Hörsaal. Es gibt voraussichtlich fünf Aufgaben, von denen drei innerhalb von 4 Stunden in einer Klausur bearbeitet werden sollen. Für einen kleinen Imbiss ist gesorgt. Bringt bitte Schreibgerät, sowie Zirkel und Lineal mit.

Wir sind sicher, dass eure Schule euch dafür an diesem Tag vom Unterricht befreien wird. Bei Rückfragen stehen wir gerne zur Verfügung.

Wir freuen uns, wenn ihr erneut zahlreich an dem Wettbewerb teilnehmt und wünschen allen Teilnehmern viel Spaß (und Erfolg) bei der Bearbeitung der Aufgaben. Sie sind interessant, aber auch nicht leicht zu bearbeiten. Zur Einstimmung und zur Orientierung über den Schwierigkeitsgrad findet ihr auf `http://www.mint-hamburg.de/ISM/` Aufgaben und Lösungsvorschläge aus früheren Jahren. Einige dieser Aufgaben sind auch auf der Rückseite dieses Briefes aufgeführt.

Mit freundlichen Grüßen

Jan Henrik Sylvester

Einige Aufgaben zur Einstimmung

1) Auf jedem der 64 Felder eines Schachbretts steht zu Anfang ein Turm. Es werden nun nacheinander alle die Türme entfernt, die eine ungerade Anzahl von Türmen bedrohen. Wie viele Türme können auf diese Weise höchstens entfernt werden? (Ein Turm bedroht einen anderen Turm, wenn dieser in der gleichen Zeile oder Spalte steht und sich zwischen ihnen kein weiterer Turm befindet.)

2) In einer Urne befinden sich rote, grüne, blaue und weiße Kugeln, insgesamt 111 Stück. Wenn Du 100 Kugeln ohne hinzusehen herausnimmst, so sind darunter stets vier Kugeln, die alle unterschiedliche Farben haben. Wie viele Kugeln musst Du (ohne hinzusehen) mindestens herausnehmen, damit darunter garantiert Kugeln von drei unterschiedlichen Farben sind?

3) In der Ebene sind ein Kreis und eine Gerade gegeben, die sich nicht schneiden. Konstruiere nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal ein Quadrat, von dem zwei benachbarte Ecken auf dem Kreis und die beiden anderen Ecken auf der Geraden liegen. Dabei sei vorausgesetzt, dass ein solches Quadrat existiert.

4) Für welche natürlichen Zahlen n gibt es lauter unterschiedliche natürliche Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$, so dass $a_1/a_2 + a_2/a_3 + \cdots + a_n/a_1$ wieder eine natürliche Zahl ist, und für welche n nicht?

5) Drei Kreise schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt X. Die weiteren drei Schnittpunkte je zweier Kreise seien A, B und C. Nun sei A' der Schnittpunkt der Geraden durch A und X mit dem Umkreis des Dreiecks BCX. Analog seien die Punkte B' und C' definiert. Zeige, dass die Dreiecke ABC', $AB'C$ und $A'BC$ ähnlich sind.

6) Es seien $P(x)$ und $Q(x)$ zwei Polynome positiven Grades. Für jedes x gelte

$$P\big(P(x)\big) = Q\big(Q(x)\big) \qquad \text{und} \qquad P\big(P\big(P(x)\big)\big) = Q\big(Q\big(Q(x)\big)\big).$$

Folgt daraus notwendigerweise $P(x) = Q(x)$?

7) Für welche natürlichen Zahlen N lassen sich die Zahlen von 1 bis N so anordnen, dass die Summe von je k aufeinander folgenden Zahlen, $k \geq 2$, nicht durch k teilbar ist?