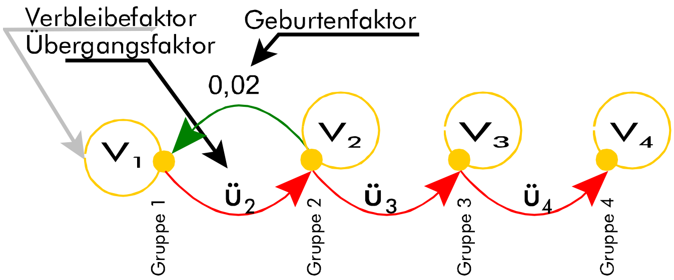
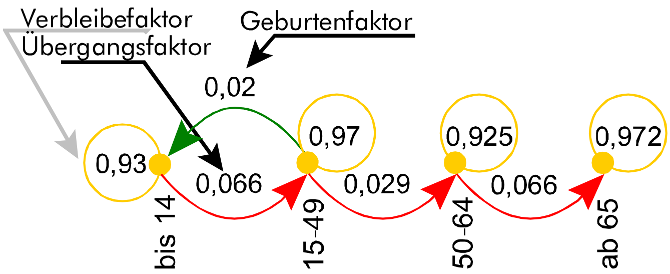
BEISPIEL-FOLIE 1





Die Übergänge zur nächsten Gruppe berechnen sich aus der Zeitdauer einer Gruppe (wobei man annimmt, dass jede mögliche Altersstufe innerhalb einer Gruppe etwa gleich viele Menschen umfasst), abzüglich der jährlichen durchschnittlichen Sterberate in der Gruppe.

Als Startwert wird der in der Aufgabe gegebene verwendet:

(12,3|39,1|15,5|16,3) – Angabe in Millionen.

BEISPIEL-FOLIE 2

Gruppe1: Die erste Gruppe erhält zunächst „Zuwachs“ über die Geburten. Da die Gruppen nicht nach Geschlecht unterschieden werden, muss hier eine Annahme getroffen werden, etwa dass in der 2. Altersgruppe 50% Frauen sind.

Es sind 35 Jahrgänge in der Gruppe 2, also je Altersjahr 1/35 der Gesamtzahl, gerundet 0,03. Die Zahl der Geburten ergibt sich dann mit 0,02 · Anzahl der Menschen in Gruppe 2, da 0,5 · 1,4 · 1/35 = 0,02.

Die Überlebensrate in Gruppe 1 beträgt 99,6%. Zugleich verringert sich die Anzahl der Menschen in Gruppe 1 (und in den beiden folgenden Gruppen) durch die Anzahl derer, die in die nächste Gruppe übergehen, hier mit obiger Annahme 1/15 der Gruppe. Da 0,996 ⍰ 14/15 ≈ 0,930, verbleiben daher 0,93 ⍰ Anzahl der Menschen in Gruppe 1.

Also ist der Verbleibefaktor:	0,930
Geburtenfaktor	0,020 (bezogen nur auf Gruppe 2)
Übergangsfaktor	1/15 · 0,996 ≈ 0,066

BEISPIEL-FOLIE (Derive) 3

Rechenbeispiel für Population

Der Vergleich dieses Modells der Linearen Algebra mit entsprechenden Wachstumsmodellen der Analysis kann für das grundlegende Niveau ohne Rechnungen mit inhaltlichen Elementen durchgeführt werden.

$$M := \begin{pmatrix} 0{,}93 & 0{,}02 & 0 & 0 \\ 0{,}066 & 0{,}97 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}029 & 0{,}925 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}066 & 0{,}972 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12{,}3 \\ 39{,}1 \\ 15{,}5 \\ 16{,}3 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0{,}93 & 0{,}02 & 0 & 0 \\ 0{,}066 & 0{,}97 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}029 & 0{,}925 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}066 & 0{,}972 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12{,}3 \\ 39{,}1 \\ 15{,}5 \\ 16{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}93 \cdot 12{,}3 + 0{,}02 \cdot 39{,}1 \\ 0{,}066 \cdot 12{,}3 + 0{,}97 \cdot 39{,}1 \\ 0{,}029 \cdot 39{,}1 + 0{,}925 \cdot 15{,}5 \\ 0{,}066 \cdot 15{,}5 + 0{,}972 \cdot 16{,}3 \end{pmatrix}$$

Das ergibt nach einem Jahr gerundet
für die Gruppe 1: 12,2210
für die Gruppe 2: 38,7388
für die Gruppe 3: 15,4714
für die Gruppe 4: 16,8666

$$\begin{bmatrix} 5 & 83.4742546 \\ 10 & 83.26076789 \\ 15 & 82.63579578 \\ 20 & 81.66743087 \\ 25 & 80.41578754 \\ 30 & 78.9334755 \\ 35 & 77.26621702 \\ 40 & 75.45351834 \\ 45 & 73.52934179 \end{bmatrix}$$

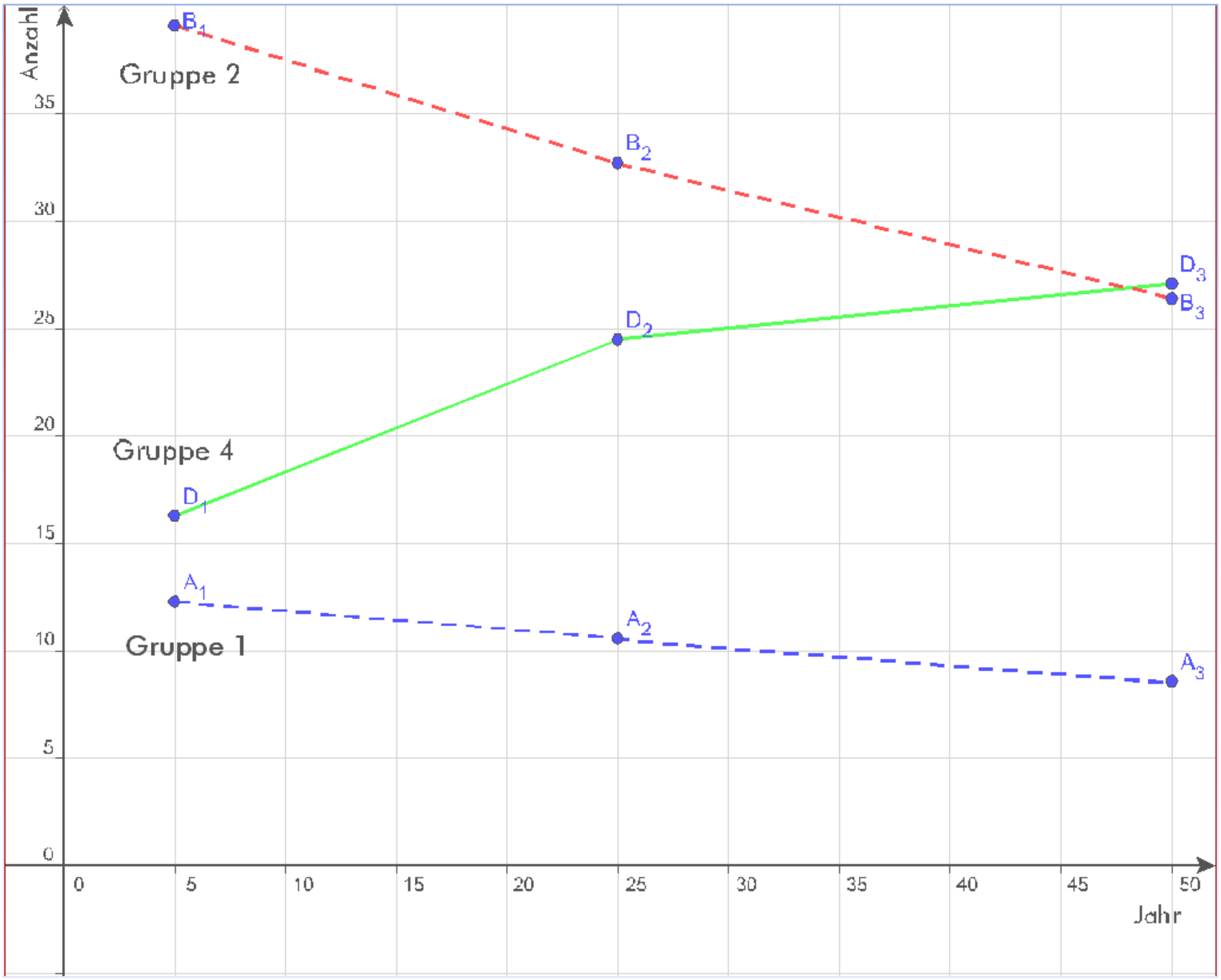
Rechnung kann so fortgeführt werden, die berechneten Zahlen können hier stehen.

Für das erhöhte Niveau sollte man konkret eine Funktion der Analysis bestimmen und dazu benötigt man jeweils die Summen der Komponenten.

BEISPIEL-FOLIE (Geogebra) 4

<u>y-Achse:</u> Anzahl in Millionen

<u>x-Achse:</u> Jahre bedeutet hier :2000 + Jahre.



Gruppe 1: 0 bis 14 (mit Buchstabe A) verliert Mitglieder

Gruppe 2: 15 bis 49 (Buchstabe B) verliert stark Mitglieder.

Gruppe 4: ab 65 (Buchstabe D) gewinnt stark.

Die Tendenz des Modells stimmt: Die beiden Gruppen mit jüngeren Mitglieder bauen ab, die der wichtigen Gruppe D nimmt stark zu.

BEISPIEL-FOLIE 5A

Entwicklung der Bevölkerung in Deutschland bis 2060

Jahr	Variante "mittlere" Bevölkerung, Untergrenze		Variante "mittlere" Bevölkerung, Obergrenze	
	1 000	2008=100	1 000	2008=100
2008	82 002	100	82 002	100
2010	81 545	99,4	81 545	99,4
2020	79 914	97,5	80 437	98,1
2030	77 350	94,3	79 025	96,4
2040	73 829	90,0	76 757	93,6
2050	69 412	84,6	73 608	89,8
2060	64 651	78,8	70 120	85,5

Die verlangten Prognosen nach 20 Jahren und nach 45 Jahren liegen gut.
Das Modell scheint geeignet zu sein.

2020: 81,7 fast in [79,9|80,5]

2045: 73,5 knapp unterhalb in [73,8|76,8], das Intervall gehört aber zu 2040, in dem zu 2050 liegt es.

BEISPIEL-FOLIE 5B

Von Folie 3b gibt es Punkte, durch die eine mögliche Funktion ansatzweise geht, also die Koordinaten enthält.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
83,3	**83,4**	**83,4**	**83,5**	**83,5**	**83,5**	**83,4**	**83,4**	**83,3**	**83,3**

Rundet man die Populationsgröße auf eine Nachkommastelle, nähert eine Gerade die berechneten Daten (siehe Wertetabelle). Für diesen Fall ist das Modell nicht geeignet.

Es werden auch in der Realität in größeren Abständen Daten erhoben. Auf der Folie 3 sind die Bevölkerungsanzahlen im 5-Jahres Rhythmus berechnen

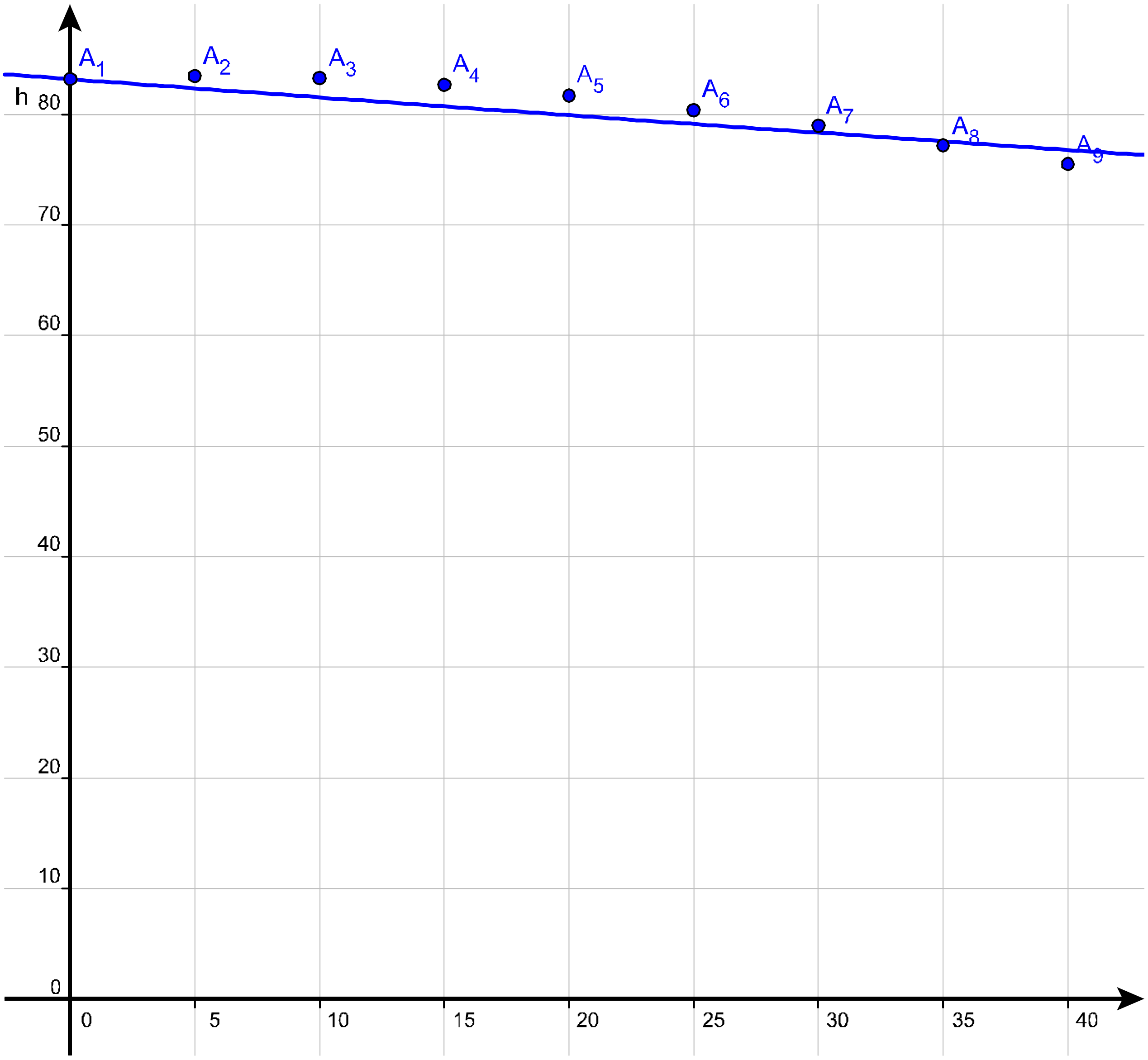
2005 +…	5	10	15	20	25	30	35	40	45
Millionen	**83,5**	**83,3**	**82,6**	**81,7**	**80,4**	**79,0**	**77,3**	**75,5**	**74,0**

h(0) = 83,2 Damit ist $h(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$ eingesetzt 83,2 = $a \cdot e^{b\,0} = a$.
Also a = 83,2
Zur Bestimmung von b wird ein zweiter Wert benötigt, wählen wir z.B. t = 30
Bisher: $h(t) = 83{,}2 \cdot e^{bt}$ also für t = 30 gilt $79{,}0 = 83{,}2 \cdot e^{30b}$
Auflösen nach $e^{30 \cdot b}$ und logarithmieren: $b \approx -0{,}002$ und daher $h(t) = 83{,}2 \cdot e^{-0{,}002\,t}$

Wegen der langsamen Änderungen ist die berechnete Funktion auch im 2. Fall der Rechnung relativ flach, wenn auch weniger ausgeprägt.

BEISPIEL-FOLIE 6

Koordinatensystem und Graph zu h aus Folie 5B.



Der Term einer stetigen Funktion wurde in 5B berechnet. Der Graph hat doch einigen Abstand von den Punkten (durch Messungen gegeben). Sein Verlauf hängt von der Wahl der beiden Parameter ab.

Jedenfalls kann man den Graph als Funktion mit negativem Wachstum interpretieren.