Präsentationsprüfung Mathematik A1

Niveau	grundlegend	*erhöht*
Themenbereich	Analysis	
Inhalt	Sin-Funktion und Exponentialfunktion zur Modellierung einer gedämpften Schwingung	
Unterricht	Die Funktionstypen sind aus dem Unterricht bekannt, die Anwendung für die gedämpften Schwingungen ist neu, die Anpassungen von Parameter (Kurvenkonstruktion) nur an ganz rationalen Funktionen geübt.	*Die Funktionstypen und die Anpassung von Parametern sind bekannt, das Anwendungsbeispiel ist neu. Die Grundidee der Differentialgleichung ist bekannt, die hier benötigte Differentialgleichung ist neu.*
Quellen	Physikbuch, z.B. Schülerduden Physik; Internet	
Benötigtes Material	Computer mit Powerpoint neueste Version, Beamer, Leinwand	

Aufgabenstellung

Gedämpfte Schwingung

Stellen Sie die im Unterricht behandelten Eigenschaften der Sinus-Funktion und er e-Funktion dar. Gehen Sie dabei auch auf Parameter ein, mit denen diese Funktionen modifiziert werden können sowie auf die Ableitungen.

Stellen Sie recherchebasiert die Eigenschaften von gedämpften Schwingungen dar und bestimmen Sie die Funktion, die zu der Wertetabelle im Anhang gehört. Ermitteln Sie besondere Punkte der Funktion und erläutern Sie diese im Sachkontext.

Zu der funktionalen Darstellung von gedämpften Schwingungen gehört eine Differentialgleichung. Erläutern Sie diesen Zusammenhang am konkreten Beispiel.

Anlage zur Aufgabe (liegt dem Prüfling auch als Excel-Tabelle vor)

t	f(t)
0	20,0000
0,08	18,3688
0,16	15,8603
0,24	12,7108
0,32	9,1685
0,4	5,4773
0,48	1,8641
0,56	-1,4729
0,64	-4,3720
0,72	-6,7141
0,8	-8,4241
0,88	-9,4714
0,96	-9,8662
1,04	-9,6552
1,12	-8,9146
1,2	-7,7428
1,28	-6,2525
1,36	-4,5627
1,44	-2,7911
1,52	-1,0476
1,6	0,5710
1,68	1,9855
1,76	3,1366
1,84	3,9864
1,92	4,5183
2	4,7355
2,08	4,6590
2,16	4,3242
2,24	3,7778
2,32	3,0732
2,4	2,2676
2,48	1,4177
2,56	0,5769
2,64	-0,2079
2,72	-0,8976
2,8	-1,4629
2,88	-1,8847
2,96	-2,1541
3,04	-2,2717
3,12	-2,2471
3,2	-2,0966
3,28	-1,8421
3,36	-1,5094
3,44	-1,1256
3,52	-0,7181
3,6	-0,3127
3,68	0,0676
3,76	0,4037
3,84	0,6811
3,92	0,8902
4	1,0263
4,08	1,0893
4,16	1,0833
4,24	1,0160
4,32	0,8978
4,4	0,7408
4,48	0,5580
4,56	0,3627
4,64	0,1674
4,72	-0,0168
4,8	-0,1805
4,88	-0,3166
4,96	-0,4201
5,04	-0,4887
5,12	-0,5220
5,2	-0,5220
5,28	-0,4921
5,36	-0,4373
5,44	-0,3633
5,52	-0,2763
5,6	-0,1828
5,68	-0,0887
5,76	0,0004
5,84	0,0801
5,92	0,1468
6	0,1980
6,08	0,2325
6,16	0,2500
6,24	0,2514
6,32	0,2383
6,4	0,2129
6,48	0,1780
6,56	0,1367
6,64	0,0919
6,72	0,0466
6,8	0,0035
6,88	-0,0353
6,96	-0,0679
7,04	-0,0933
7,12	-0,1106
7,2	-0,1197
7,28	-0,1210
7,36	-0,1153
7,44	-0,1036
7,52	-0,0872
7,6	-0,0676
7,68	-0,0461
7,76	-0,0243
7,84	-0,0035
7,92	0,0154
8	0,0314

Vom Prüfling vorgelegte Dokumentation

1. Gliederung der Präsentation

1 Exponentialfunktion und sin-Funktion

1.1 Die Exponentialfunktion, die Basis e und die Ableitung der Exponentialfunktion
Exponentialfunktionen werden in Hinblick auf die auftretenden Parameter erläutert. Die Besonderheit der Basis e wird dargestellt. Es werden zwei verschiedene Darstellungsformen verwendet: mit Eulerscher Zahl und ohne.

1.2 Die Sinus-Funktion und die Bedeutung der Parameter
Die Sinus-Funktion $g(t) = A \cdot \sin(\omega t - \varphi)$ wird hinsichtlich der auftretenden Parameter untersucht. Dabei werden die Begriffe Amplitude, Frequenz und Phasenverschiebung verwendet.

2 Die Eigenschaften der gedämpften Schwingung

2.1 **Das Federpendel und die harmonische Schwingung**
Die harmonische Schwingung wird am Beispiel des Federpendels erläutert. Der Zusammenhang der Frequenz mit der Federkonstanten und der schwingenden Masse wird beschrieben und die physikalische Deutung der Phasenverschiebung erläutert.

2.2 Das Federpendel und die gedämpfte Schwingung
Die gedämpfte Schwingung wird am Beispiel des Federpendels erläutert. Dabei wird der physikalische Hintergrund der Dämpfung und die mathematische Beschreibung angegeben.

2.3 Die Modellierung der vorgegebenen Daten
Die Daten werden analysiert und daraus auf die gesuchten Parameter geschlossen, teilweise durch Rechnung, teilweise können die Parameter direkt aus den Daten abgelesen werden.

2.4 Die zugehörige Differentialgleichung
Die Differentialgleichung zur gedämpften Schwingung wird angegeben und mit Hilfe der ersten und zweiten Ableitung wird nachgerechnet, dass die angegebene Funktion die Differentialgleichung erfüllt. Dabei wird ein Gleichungssystem aufgestellt und gelöst.

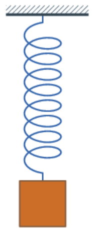
Quellen:

- http://de.wikipedia.org/wiki/Federpendel
- http://de.wikipedia.org/wiki/Gedämpfte_Schwingung
- Schülerduden Physik

Erwartungshorizont – Beispielpräsentation

Visualisierung	Begleittext
Gedämpfte Schwingungen Präsentationsprüfung Mathematik	Das Thema lautet „gedämpfte Schwingungen“, es geht also zum Beispiel um Fadenpendel oder Federpendel und deren Beschreibung mit Hilfe von Funktionen.
Gliederung 1) Exponentialfunktion und sin-Funktion – Die Exponentialfunktion, die Basis e und die Ableitung der Exponentialfunktion – Die Sinus-Funktion und die Bedeutung der Parameter 2) Die Eigenschaften der gedämpften Schwingung – Das Federpendel und die harmonische Schwingung – Das Federpendel und die gedämpfte Schwingung – Die Modellierung der vorgegebenen Daten – *Die zugehörige Differentialgleichung*	Die Gliederung entspricht dem, was ich in der Dokumentation vorgelegt habe.
Die Exponentialfunktion, die Basis e und die Ableitung der Exponentialfunktion • Formen: $f(t)=b\cdot a^{t}$ oder $f(t)=b\cdot a^{c\cdot t}$ • $f(0)=b$ • Einfluss von *a* • Bedeutung von *c* • Bedeutung der Eulerschen Zahl *e*. $f(t)=b\cdot e^{c\cdot t}$ $\quad f'(t)=b\cdot c\cdot e^{c\cdot t}$	Exponentialfunktionen sind schon aus der Mittelstufe bekannt. Üblicherweise werden die beiden hier gezeigten Darstellungsformen verwendet. Dabei beschreibt der Parameter *b* den Wert an der Stelle $t=0$. $a>0$ ist der Wachstumsfaktor, Für $a>1$ wächst die Funktion monoton für $0<a<1$ fällt sie monoton, wenn $c=1$ ist. *c* wird verwenden, um die Zeitachse zu strecken oder wenn die Eulersche Zahl verwendet wird, was neu in der Analysis der Oberstufe ist. Die Verwendung der Basis *e* macht die

Visualisierung	Begleittext
	Ableitung besonders einfach. Da die Basis dann fest ist, verwendet man den Faktor *c* im Exponenten um unterschiedliche Wachstumsfaktoren zu bekommen. Anforderungsbereich I
Die Sinus-Funktion und die Bedeutung der Parameter • $g(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi)$ • Normalfall $A=1; \omega=1; \varphi=0$ • Amplitude A • Kreisfrequenz ω. • Phasenverschiebung φ. • Ableitung $g'(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi)$	Die Sinusfunktion beschreibt periodische Prozesse aller Art, wenn man sie mit drei Parametern A, ω, und φ wie hier dargestellt verwendet. Dabei muss die Amplitude A, also die maximale Auslenkung, angepasst werden und die Kreisrequenz ω bzw. der Kehrwert, die Schwingungsdauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Je nachdem, ob man den Zeitnullpunkt auf die maximale Auslenkung oder den Nulldurchgang legt, benötigt man die Phasenverschiebung φ. Im „Normalfall“ erhält man die sin-Funktion ohne Parameter, diese hat die Periodenlänge 2π, schwingt zwischen den Werten Null und Eins und verläuft durch den Punkt (0;0). Je größer ω ist, desto schneller schwingt die Funktion. So bedeutet $\omega = 3$, dass im Intervall $0;2\pi$ statt 2 Nullstellen wie im Normalfall 6 Nullstellen vorliegen. φ verschiebt die Funktion seitlich. Bei der Ableitung muss man die Kettenregel beachten, daher entsteht der Faktor ω vor dem cos. Anforderungsbereich I-II

Visualisierung	Begleittext
Das Federpendel und die harmonische Schwingung • Reibungsfreie Schwingung $g(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi)$ • Zusammenhang von Kreisfrequenz Masse und Federkonstante $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ • Bedeutung von A. 	Ein ideales Pendel kann mit einer sin-Funktion wie eben dargestellt beschrieben werden, wenn es keine Reibung gibt und die Amplitude nicht zu groß ist. Dies gilt zum Beispiel bei einer Feder so lange, wie Auslenkung und auslenkende Kraft zueinander proportional sind. Die Federkonstante ist dann gerade die dazu gehörende Proportionalitätskonstante. Kennt man die Federkonstant und die schwingende Masse, kann man die Frequenz wie auf der Folie dargestellt bestimmen. Dies kann man herleiten, gehört aber nicht zum Wesentlichen dieses Vortrages. Die Amplitude *A* beschreibt die Strecke vom Schwerpunkt der Masse in der Ruhelage zur maximalen Auslenkung, also dem Umkehrpunkt in der Bewegung. φ hängt davon ab, wie der Zeitnullpunkt gewählt wird. Startet man die Zeitmessung im in der Ruhelage so ist $\varphi = 0$. Anforderungsbereich II
Das Federpendel und die gedämpfte Schwingung • Einfluss der Reibung. • Auswirkung der Reibung auf den Funktionsterm $x(t) = A \cdot e^{c \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi)$ • Bedeutung von $c < 0$	In der Realität sinkt durch die Reibung die Amplitude ständig. Die Amplitude kann daher mit einer Exponentialfunktion beschrieben werden. Die Amplitude in der harmonischen Schwingung wird dabei ersetzt durch Startamplitude mal Exponentialausdruck. Damit die Amplitude sinkt, muss der Faktor *c* im Exponenten kleiner als Null sein. Der Betrag von c beschreibt die Dämpfung der Schwingung: je größer der Betrag von c ist, desto größer ist die Dämpfung und desto schneller sinkt die Amplitude, die Ursache ist eine

<table>
<tr><th>Visualisierung</th><th>Begleittext</th></tr>
<tr><td></td><td>größere Reibung.

Anforderungsbereich II</td></tr>
<tr><td>Die Modellierung der vorgegebenen Daten

• t=0 liefert $A = 20$
• $\varphi = -\frac{\pi}{2}$
• $\omega = 3$
• c : der Punkt (3,12; -2,2471) liefert die Gleichung $-2,2471 = 20e^{3,12c}\sin(3\cdot 3,12 + \frac{\pi}{2})$ mit der Lösung $c = -0,7$
• Gesuchte Funktion :
$x(t) = 20e^{-0,7t}\sin(3t + \frac{\pi}{2})$</td><td>Wenn man die Daten genau ansieht, kann man das Auf und Ab der Bewegung erkennen. Für den Zeitpunkt t=0 liegt die maximale Auslenkung vor, so dass man A=20 einfach erhält. Da die sin-Funktion für t=0 Null ergibt, muss man hier eine Phasenverschiebung einsetzen, die das Maximum der sin-Funktion auf den Nullpunkt schiebt. Daher ist $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Da nach der Zeit 2π gut erkennbar drei Schwingungen stattgefunden haben, schwingt dieser Pendel drei Mal so schnell, wie die normale Sin-Schwingung, also ist ω=3.

Für c habe ich den Punkt (3,12; -2,2471) eingesetzt und dann die Gleichung $-2,2471 = 20e^{3,12c}\sin(3\cdot 3,12 + \frac{\pi}{2})$ gelöst und dadurch die gesuchte Funktion erhalten.

Anforderungsbereich III bzw. II-III</td></tr>
<tr><td>Differentialgleichung

• Differentialgleichung :
$m\ddot{x} + R\dot{x} + Dx = 0$ oder $r\ddot{x} + s\dot{x} + x = 0$
• Ableitungen
– $\dot{x}(t) = -14e^{-0,7t}\sin(3t + \frac{\pi}{2}) + 60e^{-0,7t}\cos(3t + \frac{\pi}{2})$
– $\ddot{x}(t) = -170,2e^{-0,7t}\sin(3t + \frac{\pi}{2}) - 82e^{-0,7t}\cos(3t + \frac{\pi}{2})$
• Lösung: $r \approx 0,025$ $s \approx -0,3$</td><td>Die Differentialgleichung für gedämpfte Schwingungen lautet $m\ddot{x} + R\dot{x} + Dx = 0$. Kennt man die physikalischen Parameter Masse m, Reibungskoeffizient R und Federkonstante D, kann man diese DGL lösen, d.h. es gibt Formeln für ω und c, so dass man die Funktion für die gedämpfte Schwingung hinschreiben kann.

Ich sollte nur Vorrechnen, dass meine Lösung dieser DGL entspricht. Dazu ist es einfacher, die DGL durch D zu teilen, dann bekommt man die</td></tr>
</table>

Visualisierung	Begleittext
	einfachere Form mit zwei Unbekannten. Ich habe die Ableitungen gebildet und in die DGL eingesetzt, Klammert man dann den Exponentialterm aus und sammelt alle Ausdrücke vor dem sin- und dem cos-Ausdruck getrennt, erkennt man, dass sowohl $20-14s-170r=0$ *sein muss als auch* $60s-82r=0$, *damit die Gleichung gilt. Das sind zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, die ich gelöst habe und so s und r bekommen habe.* *Anforderungsbereich III*
Quellen • http://de.wikipedia.org/wiki/Federpendel • http://de.wikipedia.org/wiki/Gedämpfte_Schwingung • Schülerduden Physik	Fast alle Informationen habe ich in Wikipedia gefunden, im Schülerduden habe ich zur Sicherheit nachgelesen, das war etwas einfacher erklärt.

Mögliche Fragen für den zweiten Prüfungsteil

- Zur Folie „Die Exponentialfunktion, die Basis e und die Ableitung der Exponentialfunktion“
    - Geben Sie ein Beispiel an, in dem die Exponentialfunktion außerhalb der Physik verwendet wird. (Anforderungsbereich I)
    - Wie erhält man fallende bzw. steigende Funktionen bei Verwendung der Basis e ? (Anforderungsbereich I)
    - Stellen Sie $f(x)=2^x$ mit Hilfe der Basis e dar. (Anforderungsbereich II)
- Zur Folie „Die Sinus-Funktion und die Bedeutung der Parameter“
    - Bilden Sie die erste und zweite Ableitung der auf der Folie gezeigten Funktion $g(t)$. Welche physikalische Bedeutung haben diese in dem Sachkontext? (Anforderungsbereich I)
    - Welche Situationen kann man neben dem Thema der Präsentation mit der sin-Funktion beschreiben? (Anforderungsbereich I)
    - Was ändert sich bei den Parametern, wenn man die identische Situation mit der cos-Funktion statt der sin-Funktion beschreibt? (Anforderungsbereich II)
- Zur Folie „Das Federpendel und die harmonische Schwingung“
    - Was genau bedeutet: „φ hängt von dem Beginn der Zeitmessung ab“? (Anforderungsbereich II)
    - ω ist die Kreisfrequenz, sin und cos sind „Winkelfunktionen am Kreis“. Stellen Sie einen Bezug zwischen dem schwingenden Massestück und eine Kreisbewegung her. (Anforderungsbereich II-III)
- Zur Folie „Das Federpendel und die gedämpfte Schwingung“
    - Was geschieht, wenn $c>0$ ist? (Anforderungsbereich I)
    - Das Sinken der Amplitude wird mit einem Exponentialausdruck beschrieben. Wie sinkt demnach die Amplitude in gleichen Zeitabschnitten qualitativ? (Anforderungsbereich I)
- Zur Folie „Die Modellierung der vorgegebenen Daten“
    - Skizzieren Sie die Funktion, die Sie heraus gefunden haben, an der Tafel (Anforderungsbereich I)
    - Begründen sie $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ ausführlich. (Anforderungsbereich II)
    - Stellen sie die Rechnung zur Bestimmung von c dar. (Anforderungsbereich II)
    - Was ändert sich, wenn man statt sin die cos-Funktion verwendet? (Anforderungsbereich II)
    - Sehen Sie andere Vorgehensweisen zur Modellierung der Daten? (Anforderungsbereich II)
    - Wie müssen sie vorgehen, wenn die Daten nicht so „gutmütig“ sind, d.h. man nicht sofort einzelne Parameter ablesen kann? (Anforderungsbereich III)
- Zur Folie „*Differentialgleichung*“
    - Rechnen Sie die erste Ableitung vor. (Anforderungsbereich I)
    - Stellen Sie dar, wie sie zu r und s gekommen sind. (Anforderungsbereich III)
    - Setzen in der Differentialgleichung R=0, ignorieren Die also die Reibung. Welcher physikalischer Sachverhalt wird dann hier ausgedrückt?
    - Warum steht die Reibung vor $\dot{x}$?

Anmerkung zur Lösung:

Der dargestellt argumentativ rechnerische Zugang zum Funktionsausdruck $x(t) = 20e^{-0,7t}\sin(3t + \frac{\pi}{2})$ steht gleichwertig neben einem Zugang, in dem die gegebene Excel-Tabelle genutzt wird.
Bei diesem Vorgehen werden die gegebenen Daten graphisch dargestellt und dann eine um die Funktion $x(t) = A \cdot e^{c \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi)$ in Abhängigkeit von den Parametern in das gleiche Koordinatensystem gezeichnet. Dann werden durch systematisches Probieren die beiden Graphen zur Deckung gebracht.
Wir dieses Vorgehen gewählt, sollte in der Präsentation der Anpassungsprozess mit Hilfe von Excel vorgeführt und durch geeignete Redebeiträge erläutert werden.

Bausteine für den Vortext für alle Präsentationsprüfungen:

Zur Bewertung:

- Die ersten Folien gehören zum Anforderungsbereich I.
- Der Schwierigkeitsgrad steigt tendenziell von Folie zu Folie.
- Die Folie „Differentialgleichung“ gehört nur zu den Anforderungen für das erhöhte und stellt dort den Anforderungsbereich III dar.
- Die Folie „Modellierung der vorgegebenen Daten“ stellt im grundlegenden Niveau den Anforderungsbereich III dar.
- Für eine Punktebewertung der mathematischen Inhalte sind alle Folien nach der Gliederung und vor der Quellenangabe etwa gleich zu gewichten.
- Die genauen Grenzen der Zugehörigkeit zu den Anforderungsbereichen hängen von Tiefe der Behandlung der einzelnen Teile im Unterricht

Diese Fragen verstehen sich nicht als abzuarbeitende Liste sondern als Spektrum von Möglichkeiten. In der Prüfung können nur einzelne Fragen gestellt werden. Hier werden Fragen zu allen drei Anforderungsbereichen und zu allen Folien vorgeschlagen. Ausgewählt werden in der Prüfung Fragen zu den Folien, bei denen Klärungsbedarf besteht und auf dem Niveau, das dem Prüfling angemessen erscheint.

Bei sehr guten Vorträgen in den ersten 15 Minuten kann man dem Prüfling auch die Frage stellen, ob er etwas Wesentliches ergänzen möchte, was er aus Zeitgründen aus seiner Präsentation gestrichen hat.