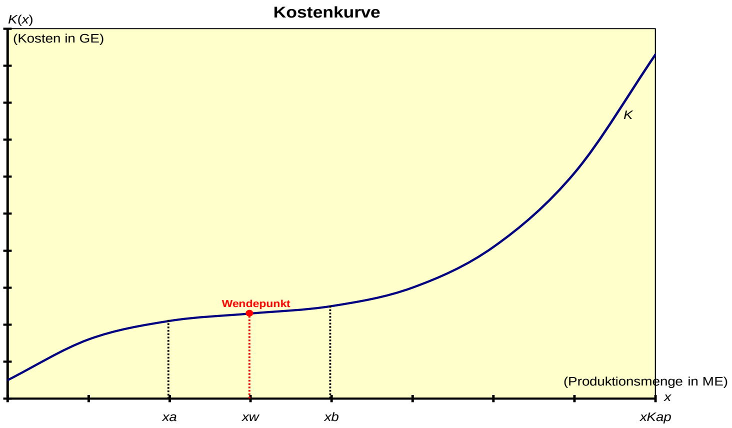
Präsentationsprüfung Mathematik AN1

Niveau	grundlegend	*erhöht*
Themenbereich	Analysis mit Verbindung zur Linearen Algebra (Gaußsches Eliminationsverfahren)	
Inhalt	Komplexes Modellieren in wirtschaftlichen Sachkontexten	
Unterricht	Ganzrationale Funktionen und Modellierten in wirtschaftlichen Sachkontexten	Neu: Teilweise abstrakte Vorgehensweise und Rechnen mit Parametern. *Problematisierung der Verwendung von K' als Grenzkostenfunktion*
Quellen	Schulbücher zur Analysis und zur Linearen Algebra, Internet	
Benötigtes Material	Computer mit Powerpoint (neueste Version), Beamer, Leinwand	

Aufgabenstellung

In den Wirtschaftswissenschaften verwendet man mathematische Methoden, um einerseits in konkreten Situationen optimale Entscheidungen treffen und andererseits ökonomische Zusammenhänge besser erklären zu können. Damit sich diese Methoden anwenden lassen, ist es in der Regel notwendig, Vereinfachungen der Realität vorzunehmen. Die folgende Grafik zeigt ein typisches Beispiel einer in der Kostentheorie für ein bestimmtes Produkt in einem bestimmten Betrieb verwendeten Kostenkurve, deren Verlauf auch als „s-förmig“ bezeichnet wird. Die zugehörige Funktion wird als Kostenfunktion K bezeichnet.



- Beschreiben Sie den Verlauf der dargestellten Kostenkurve und interpretieren Sie ihn im ökonomischen Sachkontext.

- Bestätigen Sie, dass sich die Kostenkurve durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades der

Form $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hinreichend beschreiben lässt, und ermitteln Sie mit Hilfe des „Gaußschen Eliminationsverfahrens“ unter Verwendung der Matrizenschreibweise die zugehörige Kostenfunktion K, wenn von der Kostenkurve folgende Angaben bekannt sind:

$$x_a = 2 \wedge K(x_a) = 26,\; x_w = 3 \wedge K(x_w) = 28 \text{ und } x_{Kap} = 4 \wedge K(x_{Kap}) = 98.$$

- Untersuchen Sie, welche Werte die jeweiligen Koeffizienten *a*, *b*, *c* und *d* einer Kostenfunktion K zur Darstellung einer typischen s-förmigen Kostenkurve nur annehmen dürfen.
- *Problematisieren Sie die Verwendung der ersten Ableitung K' als Grenzkostenfunktion.*

Vom Prüfling vorgelegte Dokumentation

I. Gliederung der Präsentation

1. Einleitung

   Die Entstehung und Zusammensetzung der Gesamtkosten werden kurz erläutert und auf die Bedeutung eines sinnvollen ökonomischen Definitionsbereiches wird hingewiesen.

2. Beschreibung des Verlaufs der Kostenkurve und Interpretationen im ökonomischen Sachkontext

   Die Kostenkurve stellt eine rechts-/linksgekrümmte Kurve dar, die monoton wächst. Ökonomisch kann der hier vorliegende Verlauf aus dem aus der Landwirtschaft bekannten Ertragsgesetz abgeleitet werden. Die zugehörige Kostenfunktion wird deshalb auch als ertragsgesetzliche Kostenfunktion bezeichnet.

3. Bestätigung der hinreichenden Beschreibung der Kostenkurve durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades

   Aus den typischen Verlaufsmerkmalen der Graphen von ganzrationalen wird hergeleitet, dass sich die Kostenkurve hinreichend durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades beschreiben lässt.

4. Ermittlung der Gleichung der Kostenfunktion unter Verwendung des „Gaußschen Eliminationsverfahrens“

   Durch Einsetzen der Angaben zur Kostenkurve in die allgemeine Form der Kostenfunktion wird ein Gleichungssystem aufgestellt, das in Matrizen-schreibweise mit Hilfe des „Gaußschen Eliminationsverfahrens“ gelöst werden kann.

5. Bestimmung der Wertemenge der einzelnen Koeffizienten der Kostenfunktion

   Aus den charakteristischen Merkmalen wie Krümmungsverhalten, Wendepunkt und dem Nichtvorhandensein von Extrempunkten werden algebraisch aus den entsprechenden Bedingungsgleichungen bzw. –ungleichungen Rückschlüsse auf die Wertemenge für die einzelnen Koeffizienten gezogen.

6. *Problematisierung der Verwendung von K' als Grenzkostenfunktion [<u>Nur erhöhtes Niveau!</u>]*

   Die ökonomische Definition der Grenzkosten stellt im mathematischen Sinne die Grenzkosten als Sekantensteigungen dar, die Verwendung von K' führt aber zur Gleichsetzung der Grenzkosten mit Tangentensteigungen, die wiederum nur bei linearen Funktionen identisch sind.

II. Quellen

Literatur

HEINZ GRIESEL / HELMUT POSTEL, Hrsg.; (1988): Mathematik heute – Einführung in die Analysis 1. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag

KLAUS SCHILLING (2007): Analysis – Einführungs- und Qualifikationsphase. Troisdorf: Bildungsverlag EINS

ROLF SCHÖWE / JOST KNAPP u.a. (2010): Mathematik (Wirtschaft) – Allgemeine Hochschulreife (Erweiterte Ausgabe). Berlin: Cornelsen Verlag

FRANK / STADLER / BURGER / KRETSCHMER (1993): Lineare Algebra für Wirtschaftsgymnasien. Bad Homburg: Verlag Gehlen

BOHNER / IHLENBURG / OTT (2004): Lineare Algebra. Rinteln: Merkur Verlag

BLANK, HAGEL, HAHN, MEYER, MÜLLER, PADE (2006): BWL mit Rechnungswesen für berufliche Gymnasien (Band 1). Troisdorf: Bildungsverlag EINS

Internet

http://de.wikipedia.org/wiki/Grenzkosten

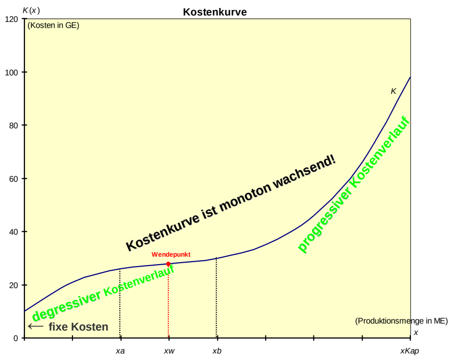
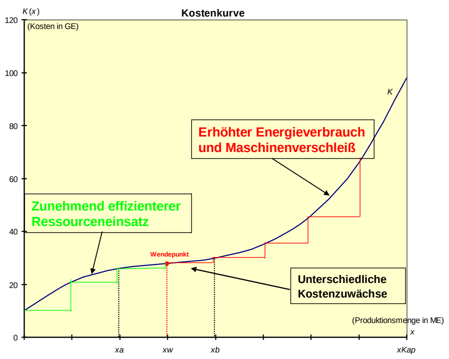
http://de.wikipedia.org/wiki/Gau%C3%9Fsches_Eliminationsverfahren

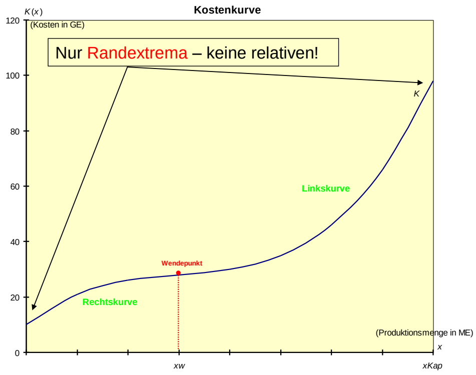
III. Medien

PowerPoint-Bildschirmpräsentation, die teilweise in Schritten aufgedeckt und durch angemessene Animationen ergänzt wird.

Erwartungshorizont – Beispielpräsentation

Visualisierung	Begleittext
Das Modell des „s-förmigen" Kostenverlaufs Präsentationsprüfung in Mathematik Name des Prüflings Folie 1	Mein Thema befasst sich mit dem Modell des s-förmigen Kostenverlaufs.
Gliederung 1. Einleitung 2. Beschreibung des Verlaufs der Kostenkurve und Interpretation im ökonomischen Sachkontext 3. Bestätigung der hinreichenden Beschreibung der Kostenkurve durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades 4. Ermittlung der Gleichung der Kostenfunktion 5. Bestimmung der Wertemenge der Koeffizienten von K *6. Problematisierung der Grenzkostenfunktion K'* Name des Prüflings Folie 2	In meinem Vortrag wird der typische Verlauf einer s-förmigen Kostenkurve beschrieben und im ökonomischen Sachkontext begründet. Die im Modell verwendeten mathematischen Methoden werden im Wesentlichen in allgemeiner Form oder am gegebenen Beispiel angewendet *und problematisiert*.
1. Einleitung Die Kostenkurve stellt graphisch die bei unterschiedlichen Produktionsmengen anfallenden **Gesamtkosten** dar. Gesamtkosten = **variable** Kosten + **fixe** Kosten **Kostenfunktion** K: $K(x)=K_{\text{var}}(x)+K_{fix}$ Sinnvoller ökonomischer **Definitionsbereich** für die Kostenfunktion K: $D_{ök}(K)=\left[0;x_{Kap}\right]$ Name des Prüflings Folie 3	Die Kostenkurve stellt graphisch die bei unterschiedlichen Produktionsmengen anfallenden Gesamtkosten in GE dar. Die Gesamtkosten eines bestimmten Produktes in einem bestimmten Betrieb ergeben sich aus den von der Produktionsmenge in ME – auch Ausbringungsmenge genannt – abhängigen **variablen Kosten** (z. B. Löhne, Fertigungsmaterial, Energie) und den von der Produktionsmenge unabhängigen **fixen Kosten** (z. B. Mieten, Abschreibungen, Versicherungsbeiträge).

Visualisierung	Begleittext
	Da ein Betrieb nur positive Mengeneinheiten (ME) bis maximal zu seiner **Kapazitätsgrenze** (x_{Kap}) herstellen kann, ist ein sinnvoller ökonomischer Definitionsbereich für die Kostenfunktion K anzugeben: $D_{ök}(K)=\left[0;x_{Kap}\right]$. **AFB I/II**
2. a) <u>Beschreibung des Verlaufs der Kostenkurve</u>  Name des Prüflings Folie 4	Bei einer Produktion von 0 ME (Produktionsstillstand) entstehen fixe Kosten in Höhe des *y*-Achsenabschnittes. Mit Aufnahme und Erhöhung der Produktion bis zur Kapazitätsgrenze fallen ständig steigende variable Kosten an. Die Kostenkurve ist also monoton wachsend. Der Kostenzuwachs ist bei jeder Produktionsmenge unterschiedlich. Anfänglich steigen die Kosten in einer rechtsgekrümmten Kurve bis zum Wendepunkt degressiv, d. h. mit jeder zusätzlich produzierten ME nimmt der Kostenzuwachs ab. Im Wendepunkt ist der Kostenzuwachs am niedrigsten. Zwischen dem Wendepunkt und der Kapazitätsgrenze steigen die Kosten in einer linksgekrümmten Kurve progressiv, d. h. mit jeder zusätzlich produzierten ME nimmt der Kostenzuwachs immer stärker zu. **AFB II**
2. b) <u>Interpretation im ökonomischen Sachkontext</u>  Name des Prüflings Folie 5	Die unterschiedlichen Kostenzuwächse, die in der Kostentheorie als **Grenzkosten** bezeichnet werden, lassen sich im relevanten Definitionsbereich wie folgt interpretieren: Bei geringen Produktionsmengen im Bereich $0;x_w$ steigen die Kosten bei einer Erhöhung der Produktionsmenge bedingt durch effizienteren Ressourceneinsatz (z. B. Arbeitskräfte und Maschinen) nur **degressiv**. Wird die Produktionsmenge über die Wendestelle hinaus ausgeweitet, bewegt sie sich also im Bereich $\left]x_w;x_{Kap}\right]$, so steigen die Kosten durch erhöhten Energieverbrauch, zusätzlichen Maschinenverschleiß,

Visualisierung	Begleittext
	Überstundenzuschläge u. a. **progressiv**. Hieraus ergibt sich zwingend, dass die Kostenkurve weder ein lokales Minimum noch Maximum aufweisen kann. **AFB II**
3. a) <u>Kostenkurve als ganzrationale Funktion 3. Grades</u>  Name des Prüflings Folie 6	Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades ist gekennzeichnet durch einen Wendepunkt, in dem der Graph von einer Rechts- in eine Linkskurve – oder auch umgekehrt – übergeht. Das Krümmungsverhalten ist dabei abhängig vom in der Funktionsgleichung K angegebenen Koeffizienten a. Für $a > 0$ ist die Kurve rechts-/linksgekrümmt, für $a < 0$ umgekehrt. Zusätzlich kann der Graph entweder paarweise einen lokalen Hoch- und Tiefpunkt aufweisen oder keinen von beiden. Diese typischen Kennzeichnen spiegeln sich im Verlauf der Kostenkurve in besonderer Weise wider, so dass eine ganzrationale Funktion 3. Grades hinreichend zu deren Beschreibung geeignet ist. **AFB II**
4. a) <u>Ermittlung der Gleichung der Kostenfunktion</u> **Aufstellen der Bedingungsgleichungen** Aus den Angaben zur Kostenkurve lassen sich die folgenden Bedingungsgleichungen herleiten: $\begin{array}{lccccccc} K(2)=26: & 8a & +4b & +2c & +d & = & 26 \\ K(3)=28: & 27a & +9b & +3c & +d & = & 28 \\ K''(3)=0: & 18a & 2b & & & = & 0 \\ K(8)=98: & 512a & +64b & +8c & +d & = & 98 \end{array}$ Name des Prüflings Folie 7	Aus den Angaben zur Kostenkurve lassen sich durch Einsetzen der entsprechenden Werte in die gegebene allgemeine Form von K die folgenden Bedingungsgleichungen herleiten. Das entstandene Gleichungssystem bzw. die sich daraus ergebende Systemmatrix bzw. erweiterte Koeffizientenmatrix lässt sich mit dem „Gaußschen Eliminationsverfahren“ eindeutig lösen. Dabei sind die folgenden elementaren Matrizenumformungen zulässig: – Vertauschen zweier Zeilen der Matrix, – Multiplizieren einer Zeile der Matrix mit einem Faktor ungleich 0, – Addieren des Vielfachen einer Zeile der Matrix zu einer anderen Zeile der Matrix.

Visualisierung	Begleittext

Visualisierung

4. b) <u>Ermittlung der Gleichung der Kostenfunktion</u>

Lösen des Gleichungssystems in Matrizenschreibweise

Das Gleichungssystem bzw. die sich daraus ergebende Systemmatrix lässt sich mit dem „**Gaußschen Eliminationsverfahren**“ eindeutig lösen:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 26 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 28 \\ 18 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 512 & 64 & 8 & 1 & 98 \end{array}\right] \left|\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 27 & 9 & 64 \\ & -8 & & \\ & & -4 & \\ & & & -1 \end{array}\right| \quad \ldots \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 26 \\ 0 & 36 & 30 & 19 & 478 \\ 0 & 0 & 48 & 52 & 1240 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 300 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 26 \\ 0 & 36 & 30 & 19 & 478 \\ 0 & 0 & 12 & 13 & 310 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right] \left|\begin{array}{c|c|c|c} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & -13 & -19 & -1 \end{array}\right|$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 26 \\ 0 & 36 & 30 & 19 & 478 \\ 0 & 28 & 18 & 9 & 234 \\ 0 & 192 & 120 & 63 & 1566 \end{array}\right] \left|\begin{array}{c|c|c|c} 1 & & & \\ & 1 & 7 & 16 \\ & & -9 & \\ & & & -3 \end{array}\right| \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 0 & 16 \\ 0 & 36 & 30 & 0 & 288 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 180 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 48 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right] \left|\begin{array}{c|c|c|c} & & 5 & 1 \\ & & & \\ & 1 & -1 & -1 \\ 1 & & & \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

Die gesuchte Kostenfunktion lautet also: $\boxed{K(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 15x + 10}$

Name des Prüflings — Folie 8

Begleittext

Lässt sich die Koeffizientenmatrix in eine Einheitsmatrix umformen, so wird der Konstantenvektor der Systemmatrix in den Lösungsvektor des Systems überführt.

Durch Einsetzen der Lösungswerte für die Koeffizienten in die allgemeine Form der Kostenfunktion ergibt sich die Gleichung der Kostenfunktion *K*.

AFB II

Visualisierung

5. <u>Bestimmung der Wertemenge für die Koeffizienten von *K*</u>

$$K:\ K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

a: $a>0$, weil die Kurve von K eine Rechts-/Linkskrümmung aufweist

b: $b<0$, weil ein Wendepunkt in $D_{ök}$ existiert und damit folgende Bedingungen erfüllt sein müssen:

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}; \quad -\frac{b}{3a} > 0 \wedge a > 0 \Leftrightarrow b < 0$$

c: $c>0$, weil die Kurve von K keinen Extrempunkt besitzt und damit folgende Bedingung <u>nicht</u> erfüllt sein darf:

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = -\frac{b}{3a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{3a}\right)^2 - \frac{c}{3a}}$$

Aus der Diskriminante ergibt sich:

$$c > 0 \wedge c < \frac{b^2}{3a} \quad \left[\text{Bei } c = \frac{b^2}{3a} \text{ liegt in } x = -\frac{b}{3a} \text{ ein Sattelpunkt!}\right]$$

d: $d>0$, weil d der y-Achsenabschnitt und damit gleich den fixen Kosten ist

Name des Prüflings — Folie 9

Begleittext

Für die Koeffizienten der Kostenfunktion ergibt sich unter Berücksichtigung der vorherigen Ausführungen:

<u>Koeffizient *a*:</u>

$a > 0$, weil die Kostenkurve eine Rechts- / Linkskrümmung aufweist

<u>Koeffizient *b*:</u>

$b < 0$, weil ein Wendepunkt in Bereich $]0; x_{Kap}[$ existiert und damit die folgenden Bedingungen erfüllt sein müssen:

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$$

Aus $-\frac{b}{3a} > 0 \wedge a > 0$ folgt: $b < 0$

<u>Koeffizient *c*:</u>

$c > 0$, weil die Kostenkurve keinen Extrempunkt besitzt und damit folgende Bedingung <u>nicht</u> erfüllt sein darf:

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{3a}\right)^2 - \frac{c}{3a}}$$

Aus der Diskriminante und der Vorgabe

<table>
<tr><th>Visualisierung</th><th>Begleittext</th></tr>
<tr><td></td><td>

$a > 0$ ergibt sich: $c > 0 \wedge c < \frac{b^2}{3a}$

<u>Sonderfall [Nur für erhöhtes Niveau!]:</u>

Sollte $c = \frac{b^2}{3a}$ *sein, so hat die Steigung in der Wendestelle* $x = -\frac{b}{3a}$ *den Wert 0 (Sattelpunkt). Ein Kostenzuwachs von Null ist aber aus ökonomischer Sicht nicht sinnvoll, da bei der Erhöhung der Produktionsmenge mindestens Material-kosten anfallen.*

<u>Koeffizient *d*:</u>

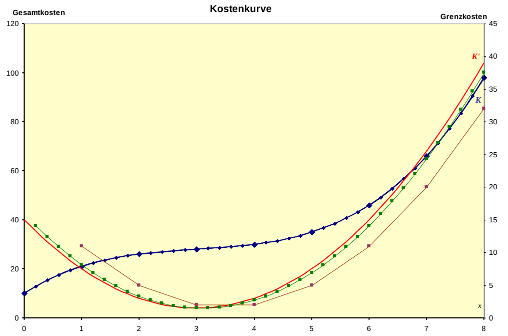
$d > 0$, weil *d* der *y*-Achsenabschnitt und damit gleich den fixen Kosten ist.

AFB II/III

</td></tr>
<tr><td>

6. <u>Problematisierung der Grenzkostenfunktion *K'*</u>

Kostenkurve bei ganzen / gebrochenen / beliebig teilbaren Produktionseinheiten:



Name des Prüflings Folie 10

</td><td>

Nach der ökonomischen Definition sind Grenzkosten der Kostenzuwachs, der durch die Mehrproduktion einer Ausbringungseinheit entsteht, also eine Sekantensteigung als Kostenzuwachs zwischen zwei Punkten. Die Ableitungsfunktion K' ordnet jedem Punkt der Kostenkurve die in diesem Punkt existierende Tangentensteigung zu, also im eigentlichen Sinne den Kostenzuwachs für eine bestimmte Ausbringungsmenge.

Dieser Widerspruch wird in der Kostentheorie dadurch gelöst, dass man von beliebig kleinen Produktionseinheiten ausgeht. Aus der Annahme, dass zwei Produktionsmengen x_1 und x_2 nur marginal zu unterscheiden sind, also $x_2 = x_1 + h$ mit $h \to 0$ gilt, lässt sich mathematisch zeigen, dass aus dem Differenzenquotienten (Sekantensteigung) in der Grenzwertbetrachtung ein Differential-quotient (Tangentensteigung) wird.

Letztendlich ist diese Annahme von beliebig kleinen Produktionseinheiten auch zwingend erforderlich, um den typischen Verlauf einer ertragsgesetzlichen Kostenkurve, der als Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades im

</td></tr>
</table>

Visualisierung	Begleittext
	ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich angesehen wird und der damit dort stetig und differenzierbar sein muss, mathematisch zu rechtfertigen. **AFB III**

Fragen für den zweiten Prüfungsteil:

Neben Fragen, die das Verständnis und die Selbstständigkeit der Lösung der Aufgabenstellung überprüfen (z. B. Nachfragen zu ökonomischen Sachkontexten und zu Rechenschritten), kann man im anschließenden Gespräch auch weiterführende Fragen, insbesondere zum semesterübergreifenden Themenbereich stellen:

1. Was versteht man im Rahmen der Matrizenumformung unter den Begriffen Pivotzeile, Pivotspalte und Pivotelement?
2. Bei Fragestellungen zur Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme werden als Entscheidungskriterien u. a. der Rang der Koeffizientenmatrix und der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix (Systemmatrix) genannt. Was heißt Rang einer Matrix A und welche Schlussfolgerungen kann man aus den Rängen der Koeffizientenmatrix und der Systemmatrix für die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems ziehen?
3. In der Kostentheorie werden zwar nach wie vor s-förmige Kostenverläufe unterstellt, aber zunehmend Modellierungen mit linearen Kostenverläufen vorgenommen. Welche Rahmenbedingungen müssen gegeben sein, damit sich diese weitere Vereinfachung der Realität als Unter- bzw. Teilmodell des hier präsentierten Modells eines s-förmigen Kostenverlaufs darstellen lässt?