Das Modell des „s-förmigen“ Kostenverlaufs

Präsentationsprüfung in Mathematik

Gliederung

1. Einleitung
2. Beschreibung des Verlaufs der Kostenkurve und Interpretation im ökonomischen Sachkontext
3. Bestätigung der hinreichenden Beschreibung der Kostenkurve durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades
4. Ermittlung der Gleichung der Kostenfunktion
5. Bestimmung der Wertemenge der Koeffizienten von K
6. *Problematisierung der Grenzkostenfunktion* K'

1. Einleitung

Die Kostenkurve stellt graphisch die bei unterschiedlichen Produktionsmengen anfallenden **Gesamtkosten** dar.

Gesamtkosten = **variable** Kosten + **fixe** Kosten

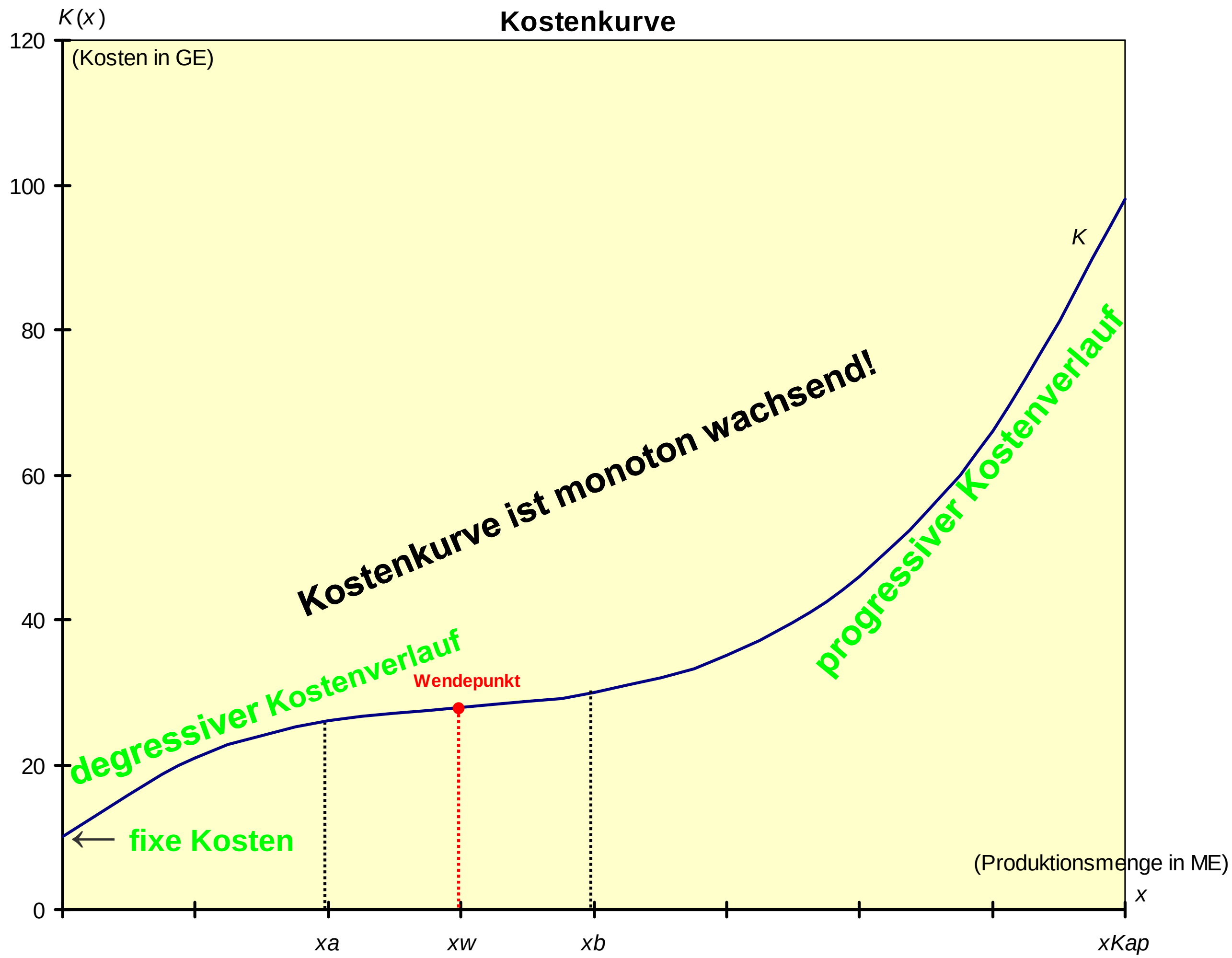
Kostenfunktion K:

$$K(x) = K_{\mathrm{var}}(x) + K_{fix}$$

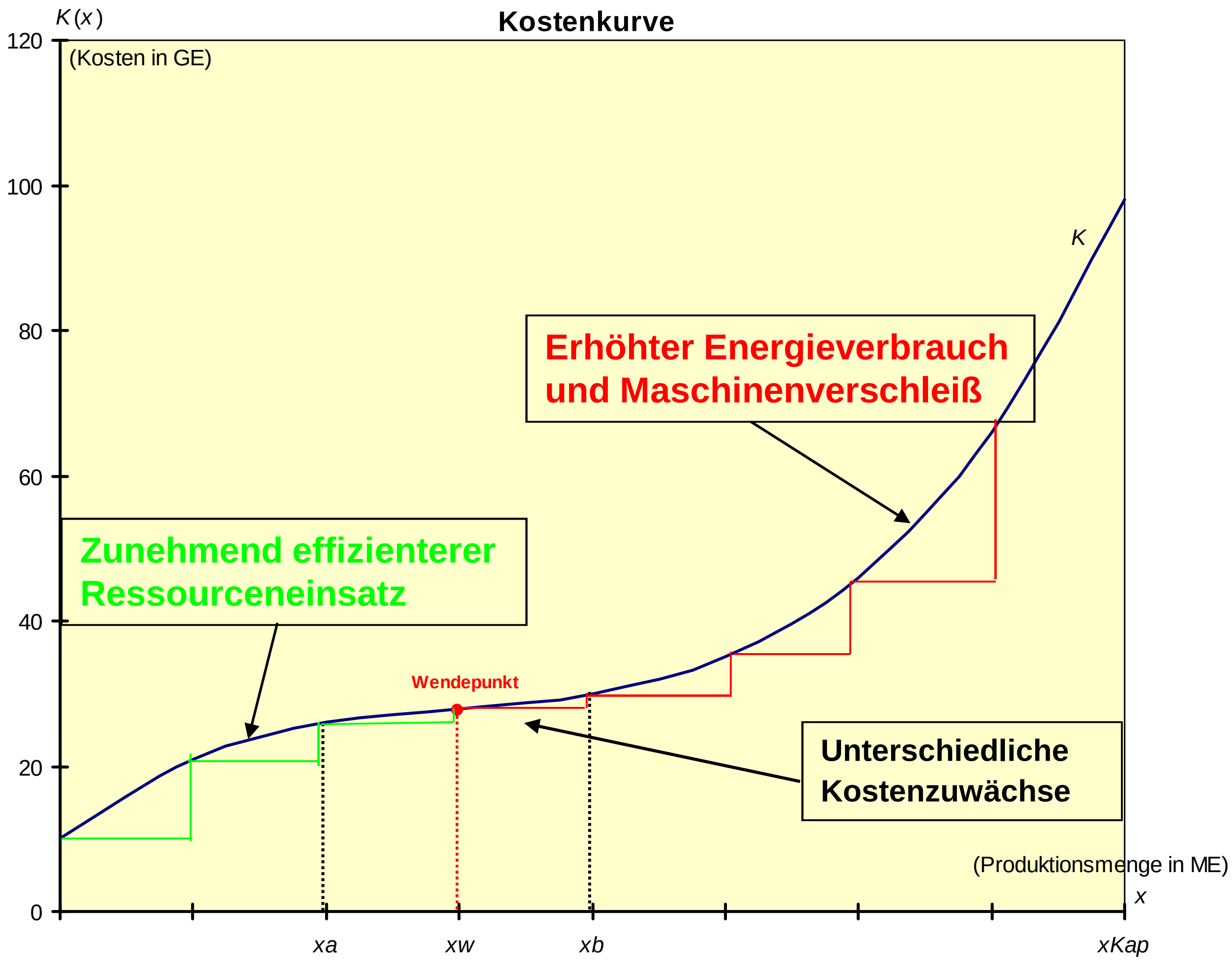
Sinnvoller ökonomischer **Definitionsbereich** für die Kostenfunktion K :

$$D_{ök}(K) = \left[0; x_{Kap}\right]$$

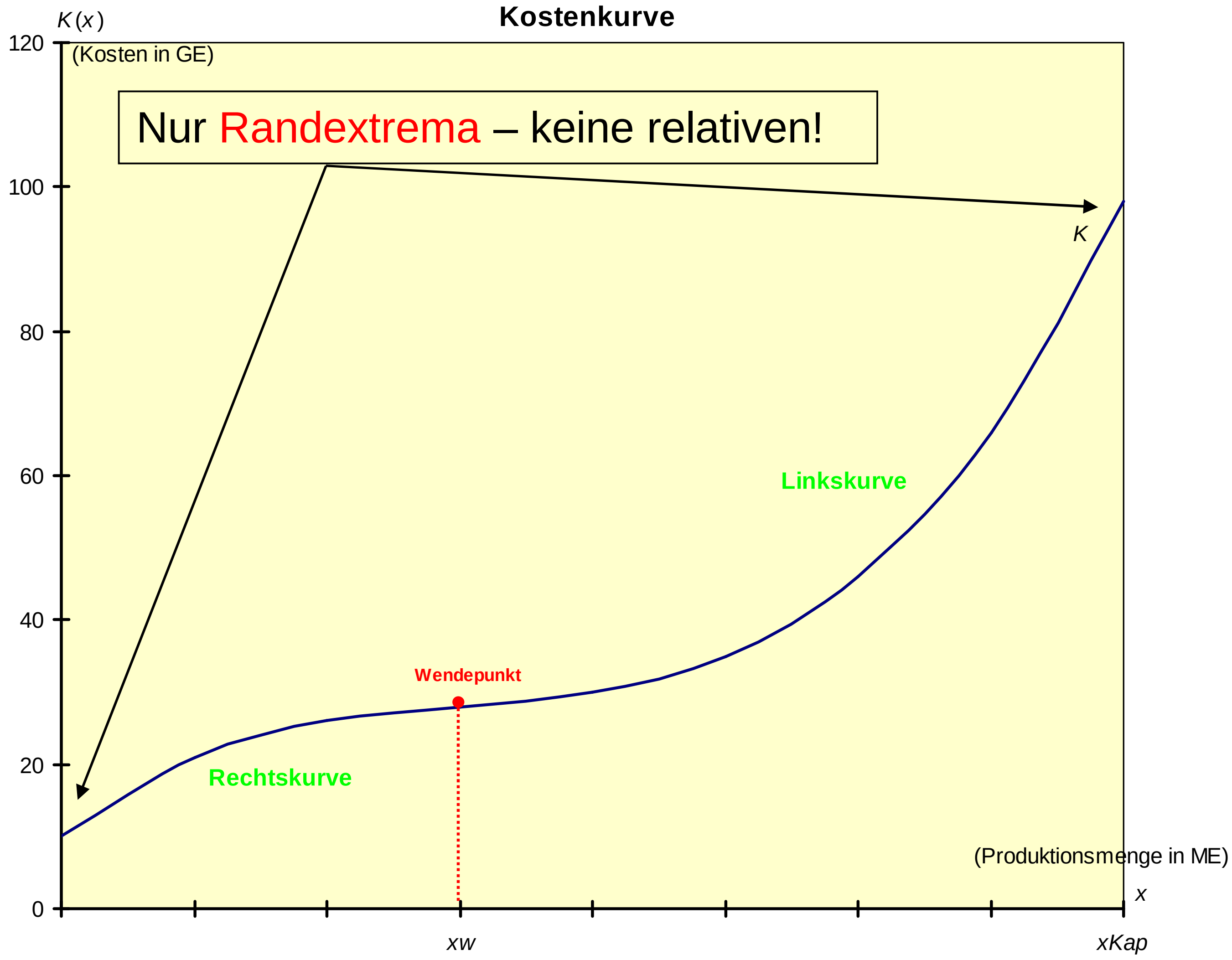
2. a) Beschreibung des Verlaufs der Kostenkurve



2. b) Interpretation im ökonomischen Sachkontext



3. a) Kostenkurve als ganzrationale Funktion 3. Grades



4. a) Ermittlung der Gleichung der Kostenfunktion

Aufstellen der Bedingungsgleichungen

Aus den Angaben zur Kostenkurve lassen sich die folgenden Bedingungsgleichungen herleiten:

$$
\begin{array}{lccccccc}
K(2)=26: & 8a & +4b & +2c & +d & = & 26 \\
K(3)=28: & 27a & +9b & +3c & +d & = & 28 \\
K''(3)=0: & 18a & 2b & & & = & 0 \\
K(8)=98: & 512a & +64b & +8c & +d & = & 98
\end{array}
$$

4. b) Ermittlung der Gleichung der Kostenfunktion

Lösen des Gleichungssystems in Matrizenschreibweise

Das Gleichungssystem bzw. die sich daraus ergebende Systemmatrix lässt sich mit dem „**Gaußschen Eliminationsverfahren**“ eindeutig lösen:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 26 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 28 \\ 18 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 512 & 64 & 8 & 1 & 98 \end{array}\right] \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} 1 & 27 & 9 & 64 \\ & -8 & & \\ & & -4 & \\ & & & -1 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 26 \\ 0 & 36 & 30 & 19 & 478 \\ 0 & 0 & 48 & 52 & 1240 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 300 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 26 \\ 0 & 36 & 30 & 19 & 478 \\ 0 & 0 & 12 & 13 & 310 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{|c|c|c|c|} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & -13 & -19 & -1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 1 & 26 \\ 0 & 36 & 30 & 19 & 478 \\ 0 & 28 & 18 & 9 & 234 \\ 0 & 192 & 120 & 63 & 1566 \end{array}\right] \begin{array}{|c|c|c|c|} 1 & & & \\ & 1 & 7 & 16 \\ & & -9 & \\ & & & -3 \end{array} \quad \ldots \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 4 & 2 & 0 & 16 \\ 0 & 36 & 30 & 0 & 288 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 180 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 48 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right] \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} & & 5 & 1 \\ & & & \\ & 1 & -1 & -1 \\ 1 & & & \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

Die gesuchte Kostenfunktion lautet also: $\boxed{K(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 + 15x + 10}$

5. Bestimmung der Wertemenge für die Koeffizienten von K

$$K:\ K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

a: a>0, weil die Kurve von K eine Rechts-/Linkskrümmung aufweist

b: b<0, weil ein Wendepunkt in $D_{ök}$ existiert und damit folgende Bedingungen erfüllt sein müssen:

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a};\quad -\frac{b}{3a} > 0 \wedge a > 0 \Leftrightarrow b < 0$$

c: c>0, weil die Kurve von K keinen Extrempunkt besitzt und damit folgende Bedingung nicht erfüllt sein darf:

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = -\frac{b}{3a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{3a}\right)^2 - \frac{c}{3a}}$$

Aus der Diskriminante ergibt sich:

$$c > 0 \wedge c < \frac{b^2}{3a} \qquad \left[\text{Bei } c = \frac{b^2}{3a} \text{ liegt in } x = -\frac{b}{3a} \text{ ein Sattelpunkt!}\right]$$

d: d>0, weil d der y-Achsenabschnitt und damit gleich den fixen Kosten ist

6. Problematisierung der Grenzkostenfunktion *K'*

Kostenkurve bei ganzen / gebrochenen / beliebig teilbaren Produktionseinheiten: