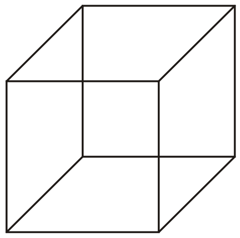
Folie 1 G = Folie 1 E

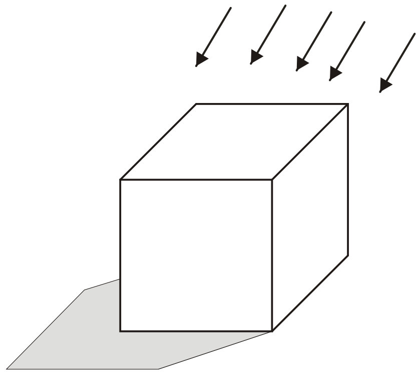
Mathematische Methoden zur Erzeugung räumlicher Effekte

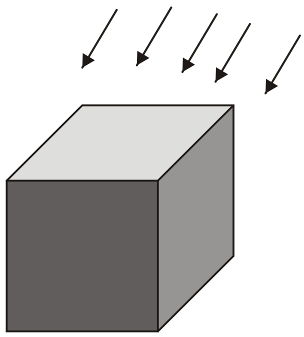
Präsentation zur mündlichen Abiturprüfung im Fach Mathematik

Max Mustermann
Konrad-Zuse-Stadtteilschule

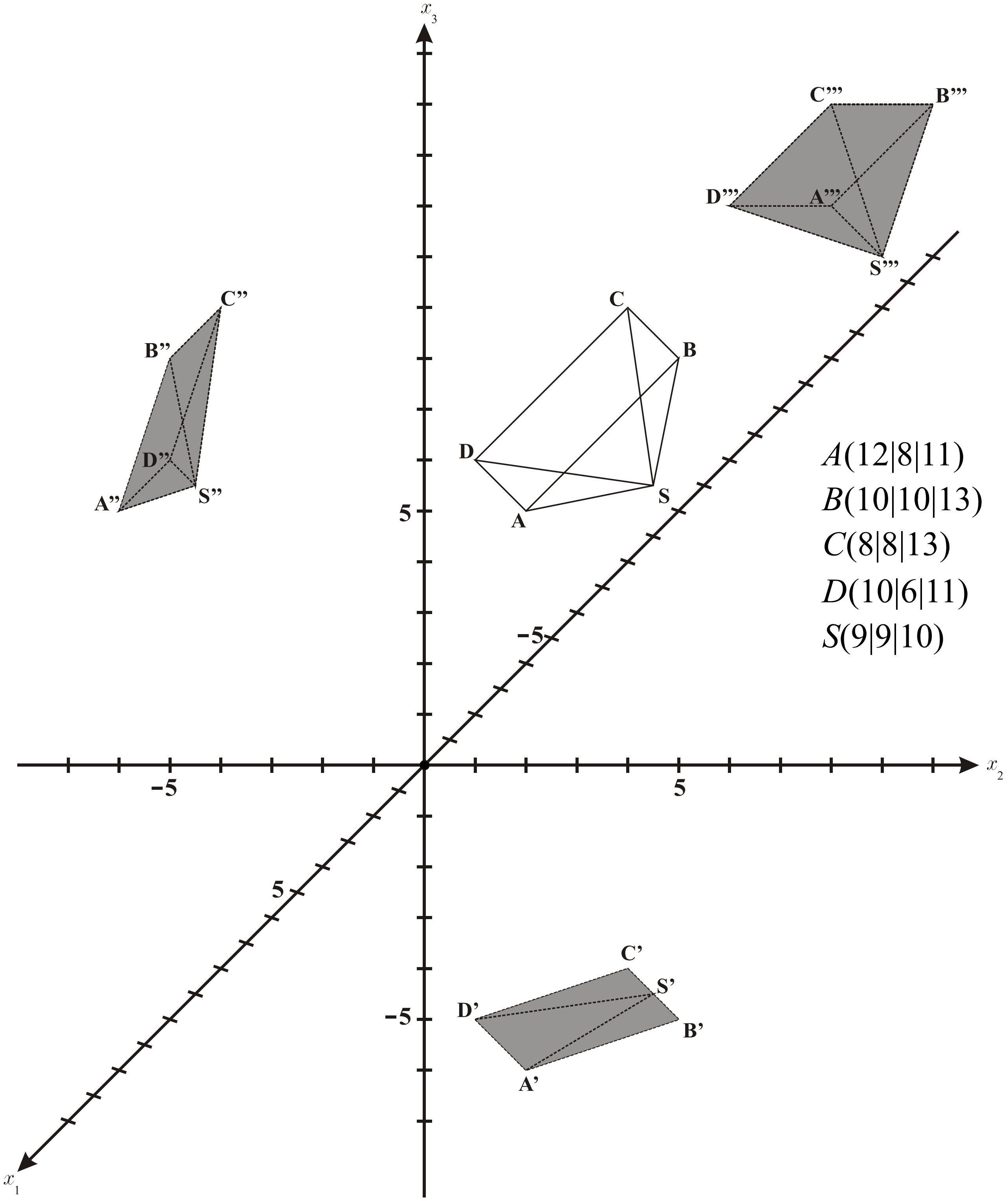
Folie 2 G = Folie 2 E







Folie 3 G



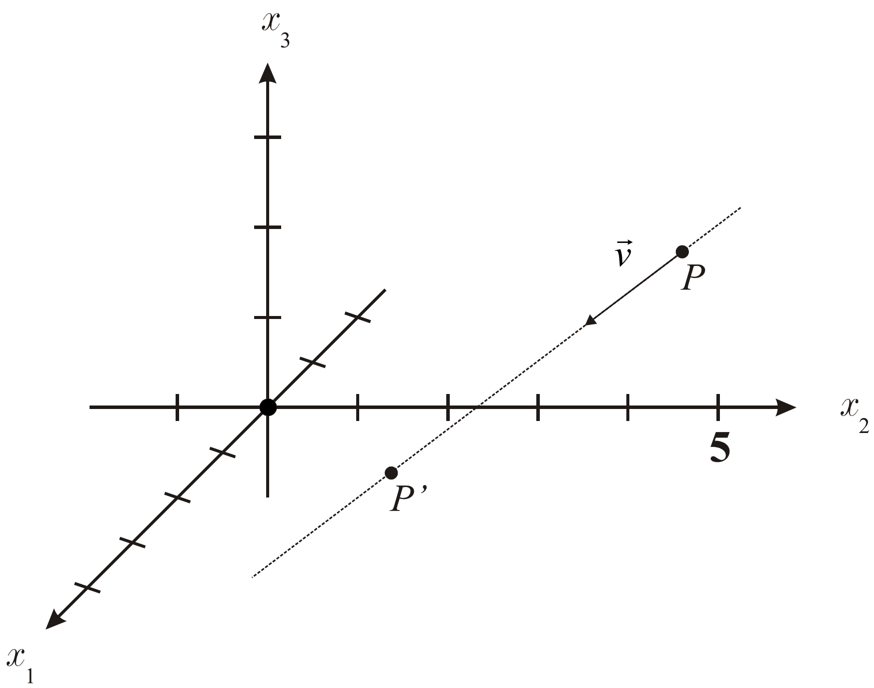
Bildpunkte bei Projektion auf die …

x_1-x_2-Ebene	x_1-x_3-Ebene	x_2-x_3-Ebene
$A'(12\|8\|0)$	$A''(12\|0\|11)$	$A'''(0\|8\|11)$
.	.	.

Folie 3 E

$P(p_1|p_2|p_3)$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$



$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad l \in \mathbb{R}$$

Wegen $x_3 = 0$ muss gelten $p_3 + l \cdot v_3 = 0 \Leftrightarrow l = -\frac{p_3}{v_3}$.

Also:

$$\begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \\ p_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \left(-\frac{p_3}{v_3}\right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 - \frac{p_3}{v_3} \cdot v_1 \\ p_2 - \frac{p_3}{v_3} \cdot v_2 \\ p_3 - \frac{p_3}{v_3} \cdot v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 - \frac{v_1}{v_3} \cdot p_3 \\ p_2 - \frac{v_2}{v_3} \cdot p_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mittels einer Matrix:

$$\begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \\ p_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{v_1}{v_3} \\ 0 & 1 & -\frac{v_2}{v_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Eine senkrechte Projektion auf die …		
x_1-x_2-Ebene	x_1-x_3-Ebene	x_2-x_3-Ebene
lässt sich erreichen durch die Multiplikation mit …		
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

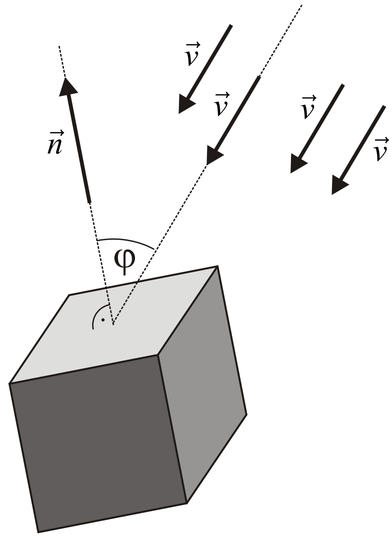
Beispiel:

Berechnung des Bildpunkt von $A(12|8|11)$ bei Projektion auf die x_2-x_3-Ebene:

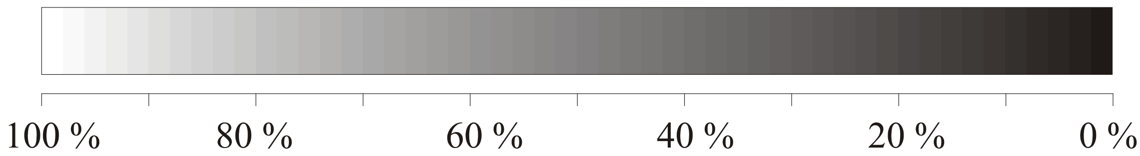
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad A'''(0|8|11)$$

Eine schräge Projektion entlang des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ auf die …		
x_1-x_2-Ebene	x_1-x_3-Ebene	x_2-x_3-Ebene
lässt sich erreichen durch die Multiplikation mit …		
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{v_1}{v_3} \\ 0 & 1 & -\frac{v_2}{v_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{v_1}{v_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{v_3}{v_2} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_2}{v_1} & 1 & 0 \\ -\frac{v_3}{v_1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Folie 5 G = Folie 5 E

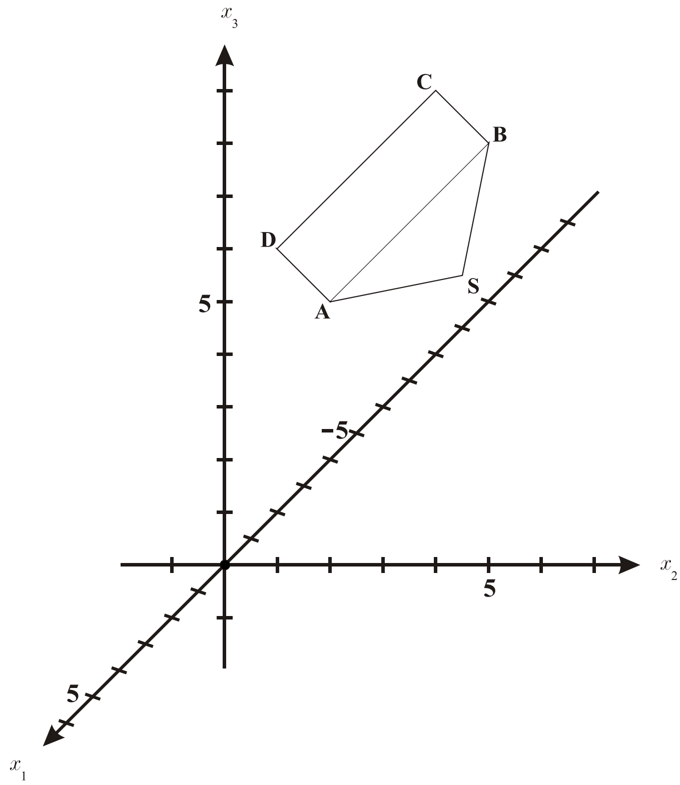


Die Helligkeit des diffus reflektierten Lichts ist proportional zu cos (φ).



Richtung des Lichts:

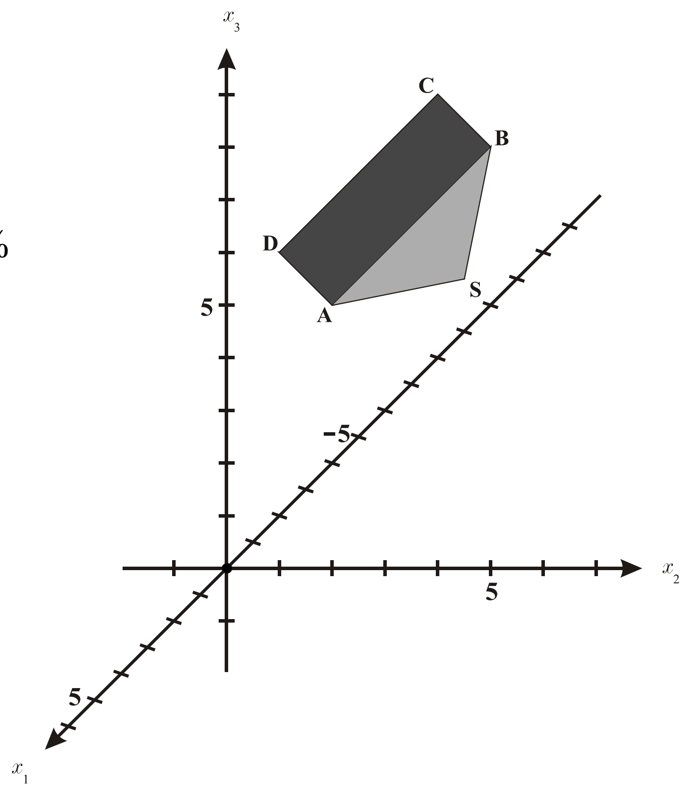
$$\vec{v}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix}$$



Normalenvektoren:

$$\vec{n}_{ABCD}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n}_{ASB}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

Helligkeitswerte:

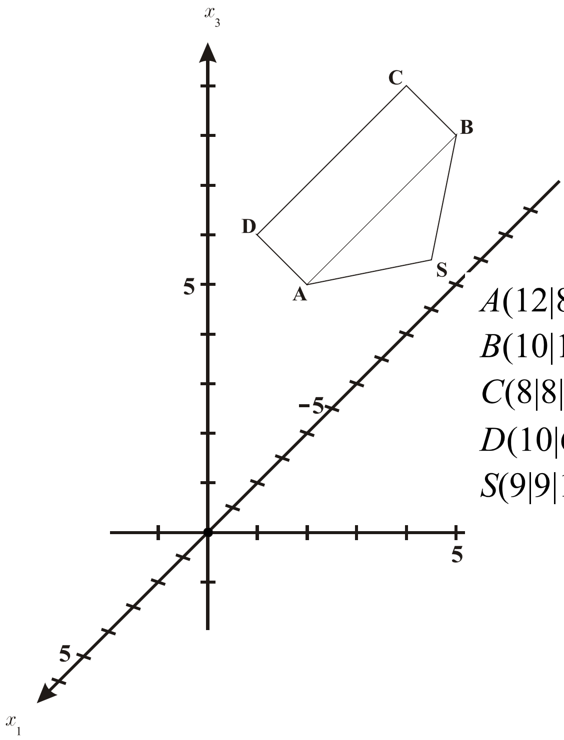


$$\cos(\varphi_{ABCD})=\left|\frac{\vec{n}_{ABCD}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{n}_{ABCD}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}\right|\approx 0,27=27\%$$

$$\cos(\varphi_{ASB})=\left|\frac{\vec{n}_{ASB}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{n}_{ASB}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}\right|\approx 0,68=68\%$$

Richtung des Lichts:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$



$A(12|8|11)$
$B(10|10|13)$
$C(8|8|13)$
$D(10|6|11)$
$S(9|9|10)$

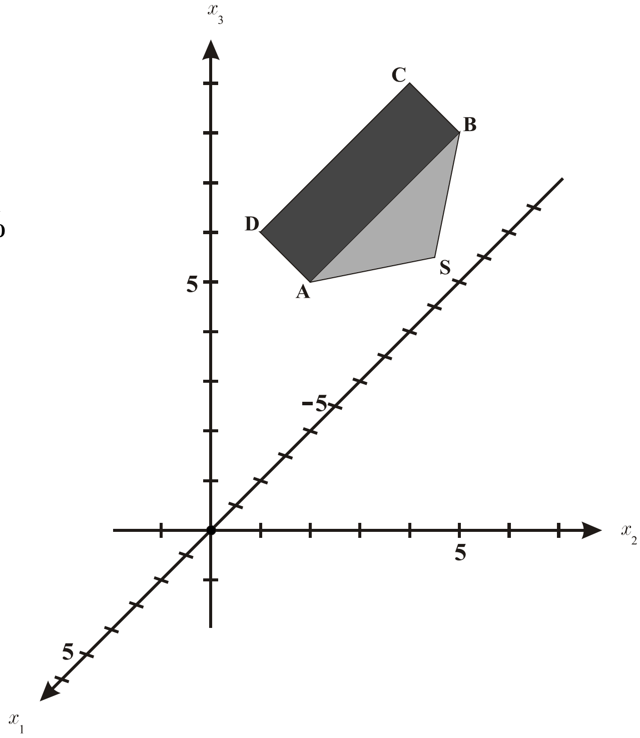
Normalenvektoren:

$$\vec{n}_{ABCD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n}_{ASB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Helligkeitswerte:

$$\cos(\varphi_{ABCD}) = \left| \frac{\vec{n}_{ABCD} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{n}_{ABCD}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|} \right| \approx 0,27 = 27\%$$

$$\cos(\varphi_{ASB}) = \left| \frac{\vec{n}_{ASB} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{n}_{ASB}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|} \right| \approx 0,68 = 68\%$$



Folie 7 G = Folie 7 E