

Niveau	grundlegend	<i>erhöht</i>
Themenbereich	Analytische Geometrie mit Verbindung zur Linearen Algebra	
Inhalt	Schnittpunkte, Matrizenmultiplikation, Skalarprodukt	
Unterricht	(im Unterricht) einfache Projektionen auf Koordinatenebenen (ohne Beschreibung durch Matrizen), Schnittpunkte Gerade-Ebene, Skalarprodukt zur Winkelberechnung, Matrizen im Kontext von Populationsmodellen	(neu) Matrizen im geometrischen Kontext, Skalarprodukt als Maß für Helligkeit
Quellen	Bender, M. & Brill, M. (2006). Computergrafik. 2. Aufl. München, Wien: Hanser. Polthier, K. et al. (2008). MathFilm Festival 2008 (DVD). Heidelberg: Springer. Lehrbücher zur linearen Algebra und analytischen Geometrie, z. B. Kroll, W. et al (1997). An. Geom./Lin. Alg. Bonn: Dümmler. (u.a. S. 147) Nachschlagwerke zur Physik	
Benötigtes Material	Folien, Overheadprojektor	

Aufgabenstellung

Mathematische Methoden zur Erzeugung räumlicher Effekte

- Erläutern Sie die Problematik der zweidimensionalen Darstellung dreidimensionaler Objekte.
- Gegeben ist eine Pyramide durch ihre Eckpunkte $A(12|8|11)$, $B(10|10|13)$, $C(8|8|13)$, $D(10|6|11)$ und $S(9|9|10)$. Diese Pyramide wird von jeweils zu den Koordinatenebenen orthogonalen Lichtstrahlen beschienen. Erzeugen Sie – soweit vorhanden – die dazugehörigen Schattenbilder auf den drei Koordinatenebenen. Untersuchen Sie, wie man jeden dieser Projektionsvorgänge auch durch eine Multiplikation mit je einer Matrix beschreiben kann.

- Untersuchen Sie am Beispiel der oben genannten Pyramide und einem

Lichtstrahlvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ die an den

Pyramidenflächen entstehenden Helligkeitsunterschiede. Gehen Sie bei Ihrer Untersuchung in Anlehnung an das Lambertsche Kosinusetz davon aus, dass die Helligkeit diffus reflektierter Strahlung proportional zum Kosinus des Winkels zwischen Lichtstrahl und Flächennormale ist.

- *Erläutern Sie die Problematik der zweidimensionalen Darstellung dreidimensionaler Objekte.*
- *Ein Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ wird von einem*

durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

beschriebenen Lichtstrahl beschienen. Ermitteln Sie – soweit vorhanden – die Koordinaten der Schattenpunkte auf den drei Koordinatenebenen.

Untersuchen Sie, wie man jeden dieser Projektionsvorgänge auch durch eine Multiplikation mit je einer Matrix beschreiben kann.

- *Untersuchen Sie an einem selbst gewählten einfachen Beispiel das Phänomen der Helligkeitsunterschiede an einem durch eine Lichtquelle beschienenen Körper. Gehen Sie bei Ihrer Untersuchung in Anlehnung an das Lambertsche Kosinusetz davon aus, dass die Helligkeit diffus reflektierter Strahlung proportional zum Kosinus des Winkels zwischen Lichtstrahl und Flächennormale ist.*

Vom Prüfling vorgelegte Dokumentation

I. Gliederung der Präsentation

1. Einleitung

Zweidimensionale Darstellungen dreidimensionaler Objekte erzeugen häufig sehr unvollständige Vorstellungen des Geschehens. Verschiedene erste Lösungsrichtungen werden angesprochen.

2. Projektionen auf die Koordinatenebenen zur Veranschaulichung der Lage im Raum

Grundlegendes Niveau: Objekte werden orthogonal auf die Koordinatenebenen projiziert. Auf diese Weise wird der nur zweidimensional betrachtenden Person die Lage des Objektes deutlich. Diese Projektionen können auch als Multiplikationen mit bestimmten Matrizen gedeutet werden. Die Matrizen werden bestimmt.

Erhöhtes Niveau: Punkte werden schräge auf die Koordinatenebenen projiziert. Diese Projektionen können auch als Multiplikationen mit bestimmten Matrizen gedeutet werden. Die Matrizen werden bestimmt.

3. Diffuse Reflexion an Flächen des Objektes zur Hervorhebung der Räumlichkeit

Nichtspiegelnde Oberflächen reflektieren Licht in alle Richtungen (diffus). Je steiler eine Lichtquelle auf die Oberfläche scheint, desto heller empfindet man die diffuse Reflexion. Das Lambertsche Kosinusetz quantifiziert diesen Zusammenhang. Auf diese Weise lassen sich räumliche Effekte durch eine Beleuchtungssimulation erzeugen.

4. Zusammenfassung und Ausblick

Die Präsentation wird zusammengefasst. Weitere Möglichkeiten und Probleme, die in dieser Präsentation nicht behandelt wurden, werden genannt.

II. Die folgenden Quellen wurden verwendet:

Bilder zum meshing

<http://www.pixolator.com/showthread.php?t=20310> (Zugriff 16.5.2010)

Literatur & DVD

BAUM, M. ET AL. (2000). Lambacher-Schweizer – Lineare Algebra mit Analytischer Geometrie (Grundkurs). Stuttgart: Klett.

BENDER, M. & BRILL, M. (2006). Computergrafik. Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch. 2. Aufl. München, Wien: Hanser.

KROLL, W. ET AL (1997). Analytische Geometrie/Lineare Algebra. Bonn: Dümmler

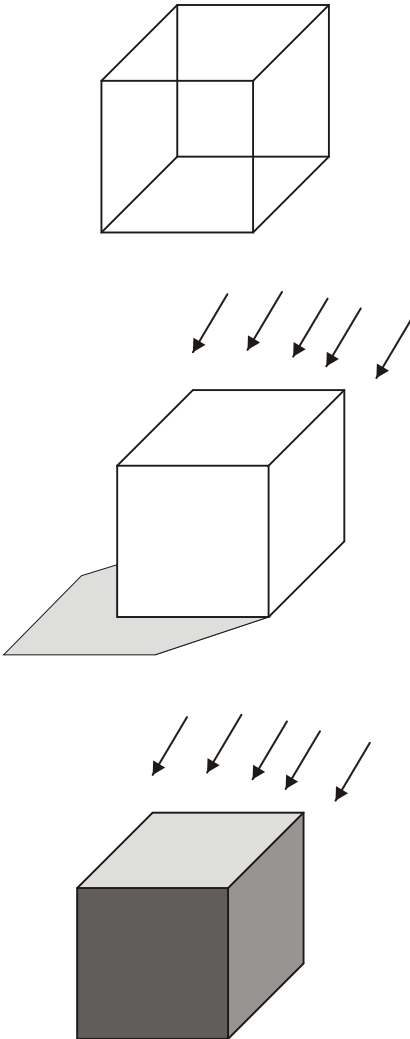
MEYERS PHYSIK-LEXIKON (1973). Mannheim: Bibliographisches Institut.

POLTHIER, K. ET AL. (2008). MathFilm Festival 2008. Eine Sammlung mathematischer Kurzfilme (DVD). Berlin, Heidelberg: Springer.

III. Benötigte Medien:

Folien, Overheadprojektor

Erwartungshorizont – Beispielpräsentation grundl. Niveau

Visualisierung	Begleittext
<p data-bbox="188 405 295 434">Folie 1 G</p> <h2 data-bbox="188 477 730 577">Mathematische Methoden zur Erzeugung räumlicher Effekte</h2> <p data-bbox="264 616 718 672">Präsentation zur mündlichen Abiturprüfung im Fach Mathematik</p> <p data-bbox="264 734 510 790">Max Mustermann Konrad-Zuse-Stadtteilschule</p>	<p data-bbox="826 409 1417 712">Im Zusammenhang mit der Programmierung von Computerspielen oder der Herstellung von computeranimierten Filmen stellt sich die Frage, wie man räumliche Objekte und Vorgänge zweidimensional auf dem Bildschirm unter Erzeugung eines räumlichen Eindrucks darstellen kann. Mit Aspekten dieser Frage beschäftigt sich die folgende Präsentation.</p>
<p data-bbox="188 824 295 853">Folie 2 G</p> 	<p data-bbox="826 840 1433 1142">Bei einem Schrägbild stellt sich nicht in jedem Fall von selbst ein räumlicher Eindruck im Auge der Betrachterin ein. In manchen Fällen scheint es sogar verschiedene räumliche Interpretationen der zweidimensionalen Projektion zu geben. So kann man das obere Objekt deuten als Ansicht eines Würfels von schräg rechts oben oder als eine Ansicht von schräg links unten.</p> <p data-bbox="826 1176 1433 1478">Es gibt verschiedene Arten, räumliche Effekte zu erzeugen. Eine Möglichkeit ist die Nutzung der Fähigkeit des Gehirns, mithilfe von Schatten einen Eindruck der Lage eines Körpers im Raum zu erlangen. Dies ist in der mittleren Abbildung illustriert. Mit diesem Zugang beschäftigt sich der erste der beiden im Folgenden vorgestellten Ansätze.</p> <p data-bbox="826 1512 1433 1859">Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Reflexion einfallenden Lichtes auf den Außenflächen des räumlichen Objektes durch verschiedene Helligkeitsstufen zu simulieren. Dadurch entsteht in besonderer Weise ein plastischer Eindruck. Dies wird in der unteren Abbildung verdeutlicht. Mit diesem Herangehen beschäftigt sich der zweite Ansatz in dieser Präsentation.</p> <p data-bbox="826 1892 1433 2024">Die im Folgenden ausgeführten Überlegungen finden vor dem Hintergrund von Computersimulationen statt. Es geht also darum, geometrische Phänomene in die Welt und in die</p>

Visualisierung

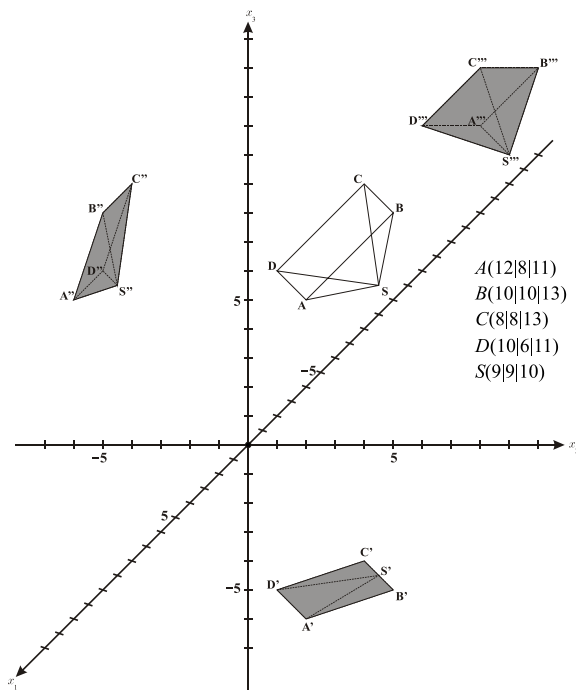
Begleittext

Sprache des Computers zu übertragen. Aus zunächst geometrischen Überlegungen werden so analytisch-geometrische Ansätze.

Zur Vereinfachung wird hier ausgegangen, dass die verwendeten Lichtquellen parallel – insbesondere keine punktförmige – Strahlung abgeben.

AFB I/II

Folie 3 G



Bildpunkte bei Projektion auf die ...

x_1 - x_2 -Ebene	x_1 - x_3 -Ebene	x_2 - x_3 -Ebene
$A'(12 8 0)$	$A''(12 0 11)$	$A'''(0 8 11)$

Die zuerst genannte Möglichkeit, einen räumlichen Eindruck zu erzeugen, soll anhand eines Beispiels verdeutlicht werden.

Eine Pyramide mit den Eckpunkten A, B, C, D und S wird jeweils senkrecht auf die drei Koordinatenebenen projiziert.

Rechnerisch bedeutet das, dass jeweils eine der drei Punktkoordinaten den Wert Null annimmt, während die anderen beiden ihren alten Wert behalten. Am Beispiel des Punktes A ist dies in der Tabelle illustriert. Für die anderen Eckpunkte wird analog vorgegangen.

Zeichnet man alle Schattenpunkte in der bekannten Weise in das Koordinatensystem ein, erhält man einen Eindruck von der Lage der schwebenden Pyramide.

AFB I

Visualisierung

Begleittext

Folie 4 G

Eine senkrechte Projektion auf die ...

x_1 - x_2 -Ebene	x_1 - x_3 -Ebene	x_2 - x_3 -Ebene
lässt sich erreichen durch die Multiplikation mit ...		
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Beispiel:

Berechnung des Bildpunkts von $A(12|8|11)$ bei Projektion auf die x_2 - x_3 -Ebene:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ also } A''(0|8|11)$$

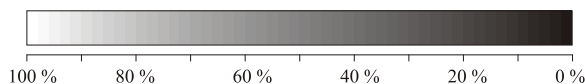
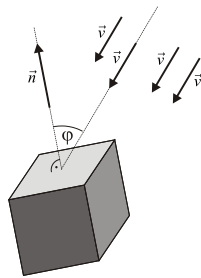
Deutet man die Pyramideneckpunkte als Spaltenvektoren, lassen sich die Projektionsvorgänge als Multiplikationen mit Matrizen auffassen.

Am Beispiel des Punktes A bei Projektion auf die x_2 - x_3 -Ebene wird dies beispielhaft durchgeführt. Die Matrix muss so gestaltet sein, dass die neue x_1 -Komponente den Wert Null erhält, während die anderen beiden Komponenten unverändert bleiben. Dies wird durch die entsprechende Besetzung der Matrix mit Nullen und Einsen erreicht. Analog sind die Matrizen für die anderen beiden Projektionsvorgänge strukturiert.

AFB II

Folie 5 G

Die Helligkeit des diffus reflektierten Lichts ist proportional zu $\cos(\varphi)$.



Eine zweite Möglichkeit zur Erzeugung eines räumlichen Eindrucks ist die Simulation der diffusen Reflexion von Licht an den Außenflächen eines Körpers. Deshalb werden hier keine Kantenmodelle, sondern geschlossene Körper betrachtet.

Unter diffuser Reflexion versteht man die Reflexion des einfallenden Lichtes in alle möglichen Richtungen. Diese sind unabhängig von der Richtung des einfallenden Lichts.

Ein typisches Beispiel sind Reflexionen an nichtspiegelnden Oberflächen. Erst durch die Reflexion des Lichtes in das menschliche Auge wird ein Objekt sichtbar. Ist die Reflexion diffus, lässt sich das Objekt aus vielen Richtungen erkennen.

Es ist naheliegend, dass ein Körper heller wirkt, wenn das Licht ihn orthogonal bescheint und dunkler, wenn das Licht schräg auf ihn trifft.

Dieser Zusammenhang wird in der Physik im Lambertschen Kosinusetz präzisiert. Dieses Gesetz wird hier in einer etwas vereinfachten Form, wie sie auf der Folie dargestellt ist, verwendet: Sei φ der spitze Winkel zwischen der

Visualisierung

Begleittext

Normalen der beschienenen Fläche und der durch den Vektor \vec{v} gegebenen Richtung des Lichtes. Dann ist die Helligkeit der diffus reflektierten Lichtstrahlung dem Kosinus des Winkels φ proportional.

Den zur Berechnung des Kosinus des Winkels nötigen Normalenvektor \vec{n} berechnet man wie üblich. Der Kosinus des Winkels φ wird mithilfe des Skalarproduktes bestimmt.

Den errechneten Werten (in Prozent) ordnet man nun Helligkeitswerten zu:

$\cos(0^\circ) = 1 = 100\%$ entspricht weiß, in diesem Fall scheint das Licht orthogonal auf die Fläche.

$\cos(90^\circ) = 0 = 0\%$ entspricht schwarz, in diesem Fall scheint das Licht parallel zur Fläche. Diese wird also gar nicht beschienen.

Helligkeitswerte zwischen 100% und 0% werden durch Grautöne dargestellt, wie es auf der Folie zu sehen ist.

AFB II/III

Folie 6 G

Richtung des Lichts:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

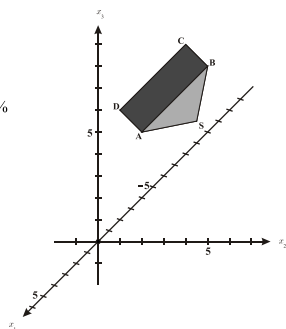
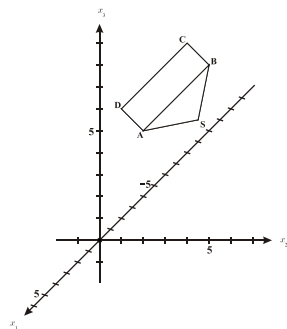
Normalenvektoren:

$$\vec{n}_{ABCD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n}_{ASB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Helligkeitswerte:

$$\cos(\varphi_{ABCD}) = \frac{|\vec{n}_{ABCD} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}_{ABCD}| \cdot |\vec{v}|} \approx 0,27 = 27\%$$

$$\cos(\varphi_{ASB}) = \frac{|\vec{n}_{ASB} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}_{ASB}| \cdot |\vec{v}|} \approx 0,68 = 68\%$$



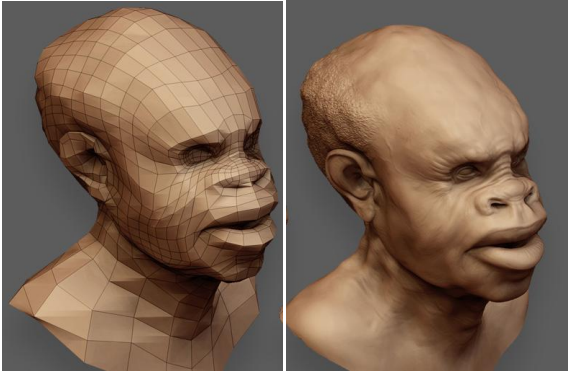
Am Beispiel der schon eingangs verwendeten schwebenden Pyramide wird dies durchgerechnet: Wir gehen von Lichtstrahlen aus, die von "rechts oben" auf die Pyramide strahlen, sodass die sichtbaren Flächen $ABCD$ (Grundfläche) und ASB (rechte Seitenfläche) beschienen werden.

Der Richtungsvektor des Lichts wird mit \vec{v} bezeichnet. Die Normalenvektoren zu den beiden Flächen bestimmt man mit den üblichen Methoden.

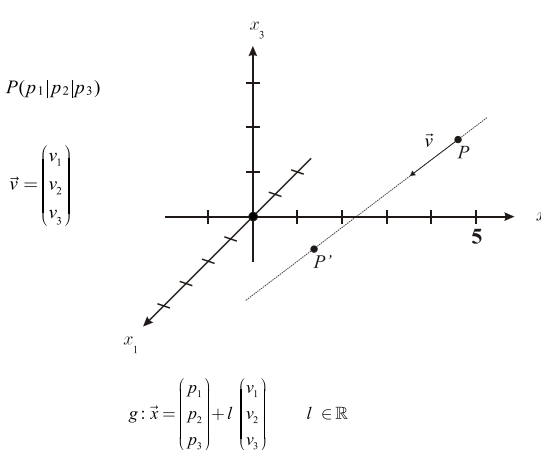
Die beiden Kosinuswerte ermittelt man wie üblich mit dem Skalarprodukt. Die Betragsstriche sorgen dafür, dass man keine negativen Helligkeitswerte erhält.

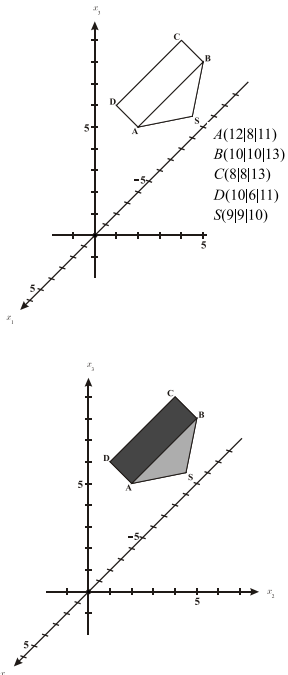
Die Grundfläche $ABCD$ hat also einen Helligkeitswert von 27 %, die Fläche ASB einen von 68%. Ordnet man diesen Werten Grautöne zu, wie es unten auf der vorherigen Folie zu sehen war, erhält man durch diese Simulation des Lichteinfalls einen räumlichen Eindruck.

AFB II/III

Visualisierung	Begleittext
<p data-bbox="188 293 293 320">Folie 7 G</p> 	<p data-bbox="826 315 1437 768">Besonders eindrucksvoll ist das Spiel mit verschiedenen Lichtheitigkeiten bei gewölbten Oberflächen. In der Praxis zerlegt man diese gewölbten Oberflächen in sehr viele kleine ebene Flächenstücke. Dieses Vorgehen nennt man meshing. Für jedes dieser Flächenstücke wird das eben beschriebene Verfahren angewendet. Sind die Flächenstücke klein genug, entsteht ein kontinuierlicher Eindruck der Helligkeitsverteilung, die in besonderer Weise einen räumlichen Eindruck vermittelt. Auf der Folie wird dies illustriert.</p> <p data-bbox="826 804 1437 1451">In der Präsentation wurden zwei Aspekte der Erzeugung eines räumlichen Eindrucks angesprochen. Dabei wurde die Frage, wo im Raum sich ein Objekt befindet, durch Schattenprojektionen beantwortet. Der plastisch-räumliche Eindruck des Objektes selbst konnte über Helligkeitswerte bei virtueller Bestrahlung aus einer bestimmten Richtung hergestellt werden. Über einige Probleme wurde jedoch hinweggegangen. Dazu zählt die Frage, wie man berechnen kann, welche Flächen eines geschlossenen Körpers aus einer bestimmten Richtung überhaupt sichtbar sind. Ebenso blieb es offen, wie man rechnerisch bestimmen kann, welche Bereiche in einem Schattenbild eines abgeschlossenen Körpers dunkel eingefärbt werden müssten.</p> <p data-bbox="1323 1424 1430 1451" style="text-align: right;">AFB III</p>

Erwartungshorizont – Beispielpräsentation erh. Niveau

Visualisierung	Begleittext			
Folie 1 E = Folie 1 G	Text 1 wie grundlegendes Niveau			
Folie 2 E = Folie 2 G	Text 2 wie grundlegendes Niveau AFB I			
<p>Folie 3 E</p>  <p> $P(p_1 p_2 p_3)$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad l \in \mathbb{R}$ </p> <p>Wegen $x_3 = 0$ muss gelten $p_3 + l \cdot v_3 = 0 \Leftrightarrow l = -\frac{p_3}{v_3}$.</p> <p>Also:</p> $\begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \\ p_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \left(-\frac{p_3}{v_3}\right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 - \frac{p_3}{v_3} \cdot v_1 \\ p_2 - \frac{p_3}{v_3} \cdot v_2 \\ p_3 - \frac{p_3}{v_3} \cdot v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 - \frac{v_1}{v_3} \cdot p_3 \\ p_2 - \frac{v_2}{v_3} \cdot p_3 \\ 0 \end{pmatrix}$ <p>Mittels einer Matrix:</p> $\begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \\ p_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{v_1}{v_3} \\ 0 & 1 & -\frac{v_2}{v_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$	<p>Im Folgenden soll zunächst untersucht werden, wie ein Punkt P mittels eines Lichtstrahles auf die Koordinatenebenen projiziert werden kann.</p> <p>Die Koordinaten des Punktes P sowie die Komponenten des Lichtstrahlvektors sind der Folie zu entnehmen. Exemplarisch wird auf die x_1-x_2-Ebene projiziert.</p> <p>Aus dem Punkt und dem Vektor wird eine Geradengleichung erstellt. Die dazugehörige Gerade wird mit der Ebene zum Schnitt gebracht. Dies erreicht man durch Setzen von $x_3 = 0$, dem Berechnen des Wertes des Parameters sowie dessen Einsetzen in die Geradengleichung.</p> <p>Man erhält die Koordinaten des Schnittpunktes P'. Auf der Folie ist zu erkennen, dass die soeben durchgeführte Rechnung auch als Multiplikation einer bestimmten Matrix mit dem als Spaltenvektor interpretierten Punkt P aufgefasst werden kann.</p> <p>AFB III</p>			
<p>Folie 4 E</p> <hr/> <p>Eine schräge Projektion entlang des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ auf die ...</p> <table border="1" data-bbox="239 1724 734 1780"> <tr> <td>x_1-x_2-Ebene</td> <td>x_1-x_3-Ebene</td> <td>x_2-x_3-Ebene</td> </tr> </table> <p>lässt sich erreichen durch die Multiplikation mit ...</p> $\left(\begin{array}{ccc ccc ccc} 1 & 0 & -\frac{v_1}{v_3} & 1 & -\frac{v_1}{v_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{v_2}{v_3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{v_2}{v_1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{v_3}{v_2} & 1 & -\frac{v_3}{v_1} & 0 & 1 \end{array} \right)$	x_1 - x_2 -Ebene	x_1 - x_3 -Ebene	x_2 - x_3 -Ebene	<p>Die soeben durchgeführte Rechnung lässt sich verallgemeinern, sodass auch Schattenpunkte auf den anderen Koordinatenebenen als Ergebnis einer Multiplikation bestimmter Matrizen mit dem als Spaltenvektor interpretierten Punkt P aufgefasst werden können. Auf der Folie sind die drei Matrizen zusammengestellt.</p> <p>AFB II</p>
x_1 - x_2 -Ebene	x_1 - x_3 -Ebene	x_2 - x_3 -Ebene		

Visualisierung	Begleittext
Folie 5 E = Folie 5 G	<p>Text 5 wie grundlegendes Niveau</p> <p style="text-align: right;">AFB II</p>
<p>Folie 6 E</p> <p>Richtung des Lichts:</p> $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ <p>Normalenvektoren:</p> $\vec{n}_{ABCD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n}_{ASB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ <p>Helligkeitswerte:</p> $\cos(\varphi_{ABCD}) = \frac{ \vec{n}_{ABCD} \cdot \vec{v} }{ \vec{n}_{ABCD} \cdot \vec{v} } \approx 0,27 = 27\%$ $\cos(\varphi_{ASB}) = \frac{ \vec{n}_{ASB} \cdot \vec{v} }{ \vec{n}_{ASB} \cdot \vec{v} } \approx 0,68 = 68\%$ 	<p>Am Beispiel einer schwebenden Pyramide, wie sie auf der Folie dargestellt ist, wird dies einmal durchgerechnet: Wir gehen von Lichtstrahlen aus, die von "rechts oben" auf die Pyramide strahlen, sodass die sichtbaren Flächen $ABCD$ (Grundfläche) und ASB (rechte Seitenfläche) beschienen werden.</p> <p>Der Richtungsvektor des Lichts wird mit \vec{v} bezeichnet. Die Normalenvektoren zu den beiden Flächen bestimmt man mit den üblichen Methoden.</p> <p>Die beiden Kosinuswerte ermittelt man wie üblich mit dem Skalarprodukt. Die Betragsstriche sorgen dafür, dass man keine negativen Helligkeitswerte erhält.</p> <p>Die Grundfläche $ABCD$ hat also einen Helligkeitswert von 27 %, die Seitenfläche ASB einen von 68%. Ordnet man diesen Werten Grautöne zu, wie es unten auf der vorherigen Folie zu sehen war, erhält man durch diese Simulation des Lichteinfalls einen räumlichen Eindruck.</p> <p style="text-align: right;">AFB II</p>
Folie 7 E = Folie 7 G	<p>Text 7 wie grundlegendes Niveau</p> <p style="text-align: right;">AFB III</p>

Fragen und erwartete Antworten in der Diskussionsphase

einfache Nachfrage (AFB I) grundlegendes Niveau

Frage des Prüfers oder der Prüferin	erwartete Antwort des Prüflings
Sie sagten, der Normalenvektor berechne sich wie üblich. Wie lassen sich Normalenvektoren bestimmen?	Ein mögliches Verfahren ist, die Komponenten des Normalenvektors als Unbekannte zu betrachten und dann ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen zu formulieren, wobei je eine Gleichung ausdrückt, dass das Skalarprodukt aus dem gesuchten Normalenvektor und jeweils einem Richtungsvektor den Wert Null haben muss. Das betrachtete Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, von denen man sich eine vom Nullvektor verschiedene herausgreift.

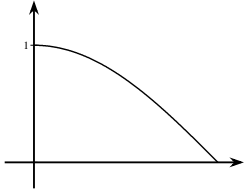
einfache Nachfrage (AFB I) erhöhtes Niveau

<i>Frage des Prüfers oder der Prüferin</i>	<i>erwartete Antwort des Prüflings</i>
<i>Frage wie grundlegendes Niveau</i>	<i>Antwort wie grundlegendes Niveau</i>

vertiefende Fragen (AFB II) grundlegendes Niveau

Frage des Prüfers oder der Prüferin	erwartete Antwort des Prüflings
Sie gaben an, dass die Grundfläche der schwebenden Pyramide sichtbar sei, also zur betrachtenden Person zeigt. Begründen Sie das.	Die x_1 -Koordinate der Pyramidenspitze S hat den Wert 10. Damit liegt der Punkt S aus der Betrachterperspektive <i>hinter</i> den Grundflächeneckpunkten A, B, C und D, denn diese haben die x_1 -Koordinaten 11 bzw. 13.
Sie sagten, zu einem Helligkeitswert von 100 % gehöre der Winkel 0° . Welcher Winkel gehört zu einem Helligkeitswert von 50%?	Zu lösen ist: $\cos \varphi = 0,5$ Also gilt $\varphi = 60^\circ$

vertiefende Fragen (AFB II) erhöhtes Niveau

Frage des Prüfers oder der Prüferin	erwartete Antwort des Prüflings
<i>In Ihrer Darstellung der schwebenden Pyramide haben Sie gewisse Pyramidenflächen als "sichtbar" bezeichnet. Begründen Sie das.</i>	<i>Die x_1-Koordinate der Pyramidenspitze S hat den Wert 10. Damit liegt der Punkt S aus der Betrachterperspektive hinter den Grundflächeneckpunkten A, B, C und D, denn diese haben die x_1-Koordinaten 11 bzw. 13. Also ist die Grundfläche sichtbar.</i> <i>Damit ist auch die rechte Seitenfläche sichtbar, denn diese wäre nur dann verdeckt, wenn die Spitze S "nach vorne" zeigte.</i>
<i>Scheint eine Lichtquelle orthogonal auf eine Fläche, hat man einen Helligkeitswert von 100%. Weicht man um 20° von der orthogonalen Richtung an, hat man immer noch einen Helligkeitswert von ca. 94%. Weicht man um das Doppelte, also um 40°, von der orthogonalen Richtung ab, hat man nur noch einen Helligkeitswert von ca. 77%. Denken Sie laut über dieses Phänomen nach.</i>	<i>Offenbar nimmt die Helligkeit stärker ab als der Winkel zu. Bei den "ersten 20°" verliert man nur ca. 6% der maximalen Helligkeit, bei den "zweiten 20°" sogar schon 17% der maximalen Helligkeit.</i> <i>Das liegt in der Kosinusfunktion begründet, die nahe 0° sehr flach verläuft und dann immer steiler abfällt, wie die folgende Skizze zeigt:</i> 

Transferfrage grundlegendes Niveau (AFB III)

Frage des Prüfers oder der Prüferin	erwartete Antwort des Prüflings
<p>Sie haben Projektionsvorgänge als Multiplikation mit einer Matrix beschrieben. Denken Sie laut darüber nach, wie man eine Spiegelung eines Punktes an der x_1- x_3-Ebene mithilfe einer Matrix beschreiben kann.</p>	<p>Bei einer Spiegelung an der x_1- x_3-Ebene ändert sich nur die x_2-Koordinate, sie erhält ein anderes Vorzeichen. Die anderen beiden Koordinaten bleiben gleich. Also müsste die beschreibende Matrix im Wesentlichen die Einheitsmatrix sein, wobei dafür gesorgt sein muss, dass die x_2-Koordinate im Spiegelbild das Vorzeichen wechselt. Also sieht die Matrix wie folgt aus:</p> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Transferfrage erhöhtes Niveau (AFB III)

Frage des Prüfers oder der Prüferin	erwartete Antwort des Prüflings
<p><i>Sie haben Projektionsvorgänge als Multiplikation mit einer Matrix beschrieben. Denken Sie zunächst laut darüber nach, wie man eine Spiegelung eines Punktes an der x_1- x_3-Ebene mithilfe einer Matrix beschreiben kann. Überlegen Sie anschließend, wie man die Spiegelung eines Punktes zunächst an der x_1-x_3-Ebene und anschließend des Bildpunktes an der x_1-x_2-Ebene durch eine einzige Matrix darstellen kann.</i></p>	<p><i>Bei einer Spiegelung an der x_1- x_3-Ebene ändert sich nur die x_2-Koordinate, sie erhält ein anderes Vorzeichen. Die anderen beiden Koordinaten bleiben gleich. Also müsste die beschreibende Matrix im Wesentlichen die Einheitsmatrix sein, wobei dafür gesorgt sein muss, dass die x_2-Koordinate im Spiegelbild das Vorzeichen wechselt. Also sieht die Matrix wie folgt aus:</i></p> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ <p><i>Die Argumentation bei der Spiegelung an der x_1-x_2-Ebene verläuft analog: Hier ergibt sich als Matrix</i></p> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ <p><i>Die zweifache Spiegelung wird dann durch das Matrixprodukt beschrieben:</i></p> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

