

Niveau	Erhöht	
Themenbereich	Stochastik in Verbindung mit Linearer Algebra	
Inhalt	Modellierung von Stochastischen Prozessen	
Unterricht	Im Unterricht: Modellierung mithilfe von Populationsmatrizen, Abzählverfahren	Neu: Modellierung von Markovprozessen
Quellen	Zur Verteilung der Seltenheitsstufen auf die aktuelle Edition: <a href="http://www.mercadia.de">www.mercadia.de</a> Zur Kartenverteilung pro Booster: <a href="http://www.de.wikipedia.org">www.de.wikipedia.org</a> Zur Stochastik bei Magic: <a href="http://www.masters-of-pain.de/board/viewtopic.php?f=13&amp;t=583">www.masters-of-pain.de/board/viewtopic.php?f=13&amp;t=583</a> Zum Problem der vollständigen Serie: Haake, Heinz: Elementare Zugänge zum Problem der vollständigen Serie, in Stochastik in der Schule, 2006, Heft 3, S.28ff	
Benötigtes Material	Computer mit Powerpoint neueste Version, Beamer, Leinwand	

## Aufgabenstellung

### Sammelkartenproblem.

Beim Sammelkartenspiel Magic – the Gathering erscheint alle vier Monate eine neue Edition von Karten. Die Karten werden in Packungen (sogenannten Boostern) zu je 15 Karten verkauft. Jeder Booster enthält eine festgelegte Anzahl unterschiedlich häufiger Karten.

Wie viel Geld muss man durchschnittlich ausgeben, um beim Sammelkartenspiel Magic - the Gathering alle Karten der aktuellen Edition durch den Kauf von Boostern zu bekommen?

- Recherchiere Sie, wie die aktuelle Edition aufgebaut ist: Wie viele Karten hat sie? Welche Seltenheitsstufen kommen wie oft vor? Wie viele Karten von welcher Seltenheitsstufe enthält ein Booster?
- Modellieren Sie das Problem, indem Sie Annahmen und Vereinfachungen festlegen.

**Hinweise:**

- ◆ Eine Kenntnis der Spielregeln des Spiels Magic – the Gathering ist für die Modellierung weder nötig noch hilfreich.
- ◆ Stellen Sie zuerst den Sachverhalt an einem Übergangsgraphen dar und erstellen sie dann die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten. Dafür ist es sinnvoll, nicht die Ereignisse (Öffnen eines Boosters), sondern die Zustände (Anzahl der bis zu diesem Zeitpunkt erhaltenen verschiedenen Karten einer Seltenheitsstufe) zu betrachten.
- ◆ Gehen Sie schrittweise vor. Betrachten Sie zunächst nur die seltensten Karten und verfeinern Sie das Modell anschließend so weit wie es Ihnen sinnvoll erscheint.
- ◆ Zur Lösung großer Matrizen eignet sich eine Tabellenkalkulation.
- ◆ In der Präsentation geht es in erster Linie um den Modellierungsprozess. Verzichten Sie in der Darstellung auf ausführliche Rechnungen.

# Vom Prüfling vorgelegte Dokumentation

## 1. Gliederung der Präsentation

- **Darstellung der Boosterzusammensetzung**

Die verschiedenen Seltenheitsstufen der Karten werden erläutert und die Zusammensetzung der Booster in der Edition Rise of Eldrazi dargestellt.

- **Zusammensetzung der aktuellen Edition**

Es wird dargestellt, wie viele verschiedene Karten von welcher Seltenheitsstufe in der Edition Rise of Eldrazi enthalten sind und wie die vollständige Serie hier definiert wird.

- **Stufenweise Modellierung des Sammelkartenproblems**

Das Problem wird schrittweise modelliert, bis zu einem Punkt, an dem eine vernünftige Genauigkeit erreicht ist. Die Grenzen der eigenen Modellierung werden dabei erläutert.

- Stufe 1 der Modellierung: Mythic Rares
- Stufe 2 der Modellierung: Rares
- Stufe 3 der Modellierung: Uncommons

- **Fazit und Beantwortung der Leitfrage**



Die Leitfrage wird beantwortet und die Modellierung kritisch hinterfragt.

Quellen: Zur Verteilung der Seltenheitsstufen auf die aktuelle Edition: [www.mercadia.de](http://www.mercadia.de)  
Zur Kartenverteilung pro Booster: [www.de.wikipedia.org](http://www.de.wikipedia.org)  
Zur Stochastik bei Magic: [www.masters-of-pain.de/board/viewtopic.php?f=13&t=583](http://www.masters-of-pain.de/board/viewtopic.php?f=13&t=583)

# Erwartungshorizont – Beispielpräsentation

Visualisierung	Begleittext
<p style="text-align: center;"><b>Das Sammelkartenproblem</b></p> <p style="text-align: center;">am Beispiel der Edition <i>Rise of Eldrazi</i> des Sammelkartenspiels <i>Magic – the Gathering</i></p>	<p>Die Leitfrage des Vortrages lautet: „Wie viel Geld muss man durchschnittlich ausgeben, um beim Sammelkartenspiels Magic – the Gathering alle Karten der aktuellen Edition durch den Kauf von Boostern zu bekommen?“</p>
<p style="text-align: center;"><b>Gliederung</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Darstellung der Boosterzusammensetzung</li> <li>• Zusammensetzung der aktuellen Edition</li> <li>• Stufe 1 der Modellierung: Mythic Rares</li> <li>• Stufe 2 der Modellierung: Rares</li> <li>• Stufe 3 der Modellierung: Uncommons</li> <li>• Fazit und Beantwortung der Leitfrage</li> </ul>	<p>Dafür ist es erst einmal notwendig, sich anzusehen, was für Karten in einem Magic-Booster enthalten sind und wie die aktuelle Edition aufgebaut ist.</p> <p>Anschließend werden die verschiedenen Seltenheitsstufen getrennt betrachtet. Warum das sinnvoll ist, wird während des Vortrages deutlich werden.</p> <p>Am Ende folgt dann eine Zusammenfassung und die Beantwortung der Leitfrage.</p>
<p><b>Die Zusammensetzung eines Boosters:</b></p> <p>Jeder Booster enthält...</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– 1 Rare oder 1 Mythic Rare,</li> <li>– 3 Uncommons,</li> <li>– 10 Commons,</li> <li>– 1 Standardland,</li> <li>– 1 Token oder 1 Regelkarte.</li> </ul> <p><b>Die Zusammensetzung der Edition Rise of Eldrazi:</b></p> <p>Eine vollständige Serie besteht aus...</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– 15 Mythic Rares</li> <li>– 53 Rares</li> <li>– 60 Uncommons</li> <li>– 100 Commons</li> <li>– 20 Standardländern.</li> </ul>	<p>In einem Achtel der Booster ist eine Mythic Rare, zu erkennen an einem roten Editionssymbol, in den restlichen sieben Achteln eine Rare, zu erkennen am goldenen Editionssymbol. Die Uncommons haben ein silbernes Editionssymbol, die Commons und die Standardländer ein schwarzes.</p> <p>Kein Booster enthält doppelte Karten. Das wird später bei der Betrachtung der Uncommons wichtig.</p> <p>Token und Regelkarte sind nicht spielrelevant und zählen deshalb auch nicht zur vollständigen Serie.</p> <p>Außerdem sind in einem Siebtel der Booster noch glitzernde Karten eingestreut (statt einer Common). Das wird bei dieser Modellierung außer acht gelassen, da es sich nur wenig auswirkt.</p> <p>Anforderungsbereich I</p>



Visualisierung	Begleittext
	<p>kauft, bekommt man sie schon für 2,50 Euro, was dann eine Gesamtsumme von 1000 Euro macht. Anforderungsbereich II</p>
<p><b>Betrachtung der Rares:</b></p> <p>Übergangsgraph:</p>  <p>Daraus ergibt sich eine 53x53-Matrix von der gleichen Gestalt wie bei den Mythic Rares und ein in gleicher Weise zu lösendes Gleichungssystem. Lösung: 276,02 Booster, also ca. 690 Euro</p>	<p>Die Berechnung der Summe, die man ausgeben muss, wenn man nur die Rares komplett haben will, ist genau entsprechend. Die Anzahl ist nur größer und die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer Rare ist sieben Mal so hoch (Gegenwahrscheinlichkeit)</p> <p>Offenbar wirkt sich die höhere Wahrscheinlichkeit mehr aus, als die höhere Anzahl. So dass man hier rund 40% günstiger weg kommt.</p> <p>Anforderungsbereich II</p>
<p><b>Betrachtung der Uncommons:</b></p> <p>Übergangsgraph:</p>  <p>Daraus ergibt sich eine 60x60-Matrix, bei der bis auf vier Diagonalen alles Nullen sind. Das Gleichungssystem hat die Gestalt (am Bsp. T(9):</p> $t(9) = \frac{\binom{9}{3} \binom{51}{0}}{\binom{60}{3}} * t(9) + \frac{\binom{9}{2} \binom{51}{1}}{\binom{60}{3}} * t(10) + \frac{\binom{9}{1} \binom{51}{2}}{\binom{60}{3}} * t(11) + \frac{\binom{9}{0} \binom{51}{3}}{\binom{60}{3}} * t(12) + 1$ <p>Lösung: 93 Booster, also ca. 232,50 Euro</p>	<p>Bei den Uncommons ist der Fall erheblich komplizierter, da immer gleich drei Karten in einem Booster sind und keine Doppelten vorkommen. Man kann von einem Zustand aus nicht nur einen neuen erreichen, sondern drei verschiedene. Man kann aber auch im gleichen Zustand verbleiben.</p> <p>Eine Ausnahme bildet hier der Zustand „0 Uncommons“. Von diesem Zustand kommt man zwangsläufig nach dem Öffnen des ersten Boosters in den Zustand „3 Uncommons“. Die Zustände „1“ und „2 Uncommons“ können nicht erreicht werden.</p> <p>Würde es Doppelte geben und wären somit die Kartenmöglichkeiten, die ein Booster bietet stochastisch unabhängig, könnte man das Problem einfach so behandeln, wie zuvor und hinterher die Anzahl durch drei teilen. So ist es aber auch jeweils noch ein Auswahlproblem, äquivalent zum Lottoproblem. Es wird gekuckt, wie viele neue Karten man jeweils hat.</p> <p>Das Gleichungssystem ist enorm umfangreich. Deshalb hier nur eine Zeile als Beispiel.</p> <p>Das Sammeln der Uncommons kostet also nur etwa ein Viertel dessen, was es kostet, die Mythic Rares zu sammeln.</p> <p>Anforderungsbereich III</p>

Visualisierung	Begleittext
<p style="text-align: center;"><b>Fazit:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Entscheidende Kartenart: Mythic Rares</li> <li>• Man kann davon ausgehen, dass man alle anderen Kartenarten komplett hat, bis man die Mythic Rares komplett hat.</li> <li>• Man muss etwa 1000 Euro investieren, um Rise of Eldrazi durch Kauf von Boostern komplett zu bekommen.</li> </ul>	<p>Eine Betrachtung der Commons und der Standardländer ist nicht nötig, da sofort abzusehen ist, dass man die sehr viel schneller komplett haben wird, als die anderen Kartenarten.</p> <p>Entscheidend ist vor allem, wie lange man für die Mythic Rares braucht. Es ist zwar denkbar, dass man die Mythic Rares komplett hat, bevor man z. B. die Rares alle hat, aber dieser Fall ist sehr unwahrscheinlich und wird sich auf die zu erwartende Gesamtsumme kaum auswirken.</p> <p>Daraus ergibt sich, dass man etwa 1000 Euro braucht, um die Edition Rise of Eldrazi komplett nur durch den Kauf von Boostern zu sammeln.</p> <p>Die Annahme, wann würde eine Edition nur durch den Kauf von Boostern sammeln ist allerdings nicht sehr realistisch. Tatsächlich wird es irgendwann günstiger, die fehlenden Karten einzeln zu kaufen, was zum Beispiel im Internet problemlos möglich ist.</p> <p>Man könnte seine doppelten Karten auch mit anderen Sammlern tauschen, was ja gerade einer der interessantesten Aspekte des Sammelns ist. Wenn man niemanden zum Tauschen hat, kann man seine Doppelten Karten auch im Internet verkaufen und von dem Erlös selbst die fehlenden Karten erwerben.</p> <p>Auf diese Weise ließen sich die Kosten erheblich senken.</p> <p>Anforderungsbereich III</p>

Fragen für den zweiten Prüfungsteil:

Neben Fragen, die das Verständnis und die Selbstständigkeit der Lösung überprüfen (z. B. Nachfragen nach Zellinhalten der Übergangsmatrix und nach Rechenschritten), kann man im anschließenden Gespräch auch weiterführende Fragen stellen:

1. Was für Anschlußprobleme an dieses Problem fallen Ihnen ein?
2. Wo sehen Sie Anwendungsbereiche für das, was Sie eben ausgeführt haben?

3. Bis vor einigen Jahren hat der Hersteller der Magic-Karten nur die Unterteilung Rare-Uncommon-Common gehabt, wobei dann jeder Booster eine Rare enthielt. Was vermuten Sie, hat ihn zum Einführen der Mythic Rare bewogen?

4. Stellen sie sich vor, sie würden ein Sammelkartenspiel herausgeben wollen. Worauf würden sie achten?

Bemerkung: Die Aufgabe lässt sich durch andere Sammelkartenspiele variieren: Pokemon, Yu-gi-oh ... Auf Grundlegendem Niveau lässt sich die Idee ebenso nutzen. Der Markov-Prozess sollte da aber einfacher gestaltet sein. Dabei sollte man mit dem Öffnen immer nur eine Karte, Figur o. ä. erhalten. Beispiele dafür: Überraschungsei-Figuren, Rewe-Fußballbildchen ... Ungeeignet sind Probleme, bei denen man nur mehrere gleich seltene Objekte erhält, wie z. B. Panini-Bilder, da der Einstieg in das Problem dann gleich sehr schwierig wird.