Präsentationsprüfung Mathematik Sto 1

Niveau	grundlegend	*erhöht*
Themenbereich	Stochastik	
Inhalt	Binomialverteilung, Multinomialverteilung	
Unterricht	Der Unterricht zur Stochastik fand im 3. Semester statt. Bekannt ist die Binomialverteilung, neu ist die Multinomialverteilung	Der Unterricht zur Stochastik fand im 3. Semester statt. Bekannt ist die Binomialverteilung, neu ist die Multinomialverteilung
Quellen	Schulbuch zum Themenbereich Stochastik, Internet	
Benötigtes Material	Computer mit Powerpoint neueste Version, Beamer, Leinwand	

Aufgabenstellung

In einer Urne befinden sich 5 blaue und 3 rote Kugeln. Aus der Urne wird mehrfach mit Zurücklegen gezogen und die Anzahl der roten bzw. blauen Kugeln gezählt.

Stellen Sie die zu diesem Experiment passende mathematische Theorie dar.

Es werden zusätzlich 4 gelbe Kugeln in die Urne gelegt und das Experiment wiederholt.

Was ändert sich durch die zusätzlichen Kugeln. Stellen Sie Beispiele dar und recherchebasiert allgemeine Rechenregeln. Stellen Sie die Beziehung zur Multinomialverteilung her.

Stellen Sie Erwartungswert und Varianz der Verteilung mit drei und mehr Farben im Vergleich zur Verteilung des ersten Beispiels dar.

Vom Prüfling vorgelegte Dokumentation

1. Gliederung der Präsentation

1 Die Binomialverteilung

1.1 Typisches Baumdiagramm
Das Baumdiagramm zu dem gegebenen Beispiel wird dargestellt und erläutert. Dabei wird auf die Besonderheit der Baumdiagramme bei der Binomialverteilung eingegangen.

1.2 Binomialkoeffizienten
Die Bedeutung der Binomialkoeffizienten und die Methoden zu ihrer Berechnung werden erläutert und begründet. Die Berechnung geschieht einerseits über das Pascaldreieck, andererseits über die Formel mit den Fakultäten, die am Beispiel des Lotto-Ziehens erklärt wird.

1.3 Die Formel und das Beispiel
Die Formel für die Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung wird erläutert und am Beispiel angewendet. Dazu werden die Ergebnisse von 1.1 und 1.2 zusammengeführt und für $n = 4$ zu dem vorgegebenen Beispiel die Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnet.

2 Urne mit drei Farben

2.1 Baumdiagramm und Rechnung

Das Baumdiagramm zu dem gegebenen Beispiel wird dargestellt und erläutert. Dabei wird genau so vorgegangen, wie bei den Binomialbäumen, dass die Pfade zu gleichen Kombinationen von Farben zusammen geführt werden.
Für einige Beispiele wird die Wahrscheinlichkeit ausgerechnet und mit den Binomialwahrscheinlichkeiten verglichen.

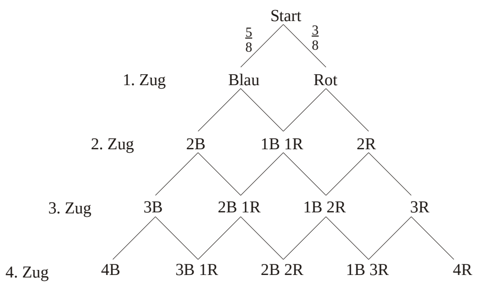
2.2 Multinomialverteilung
Die Multinomialverteilung und die zugehörige Formel werden erläutert. Die Multinomialverteilung ist eine Erweiterung der Binomialverteilung. Dieser Zusammenhang wird erklärt.

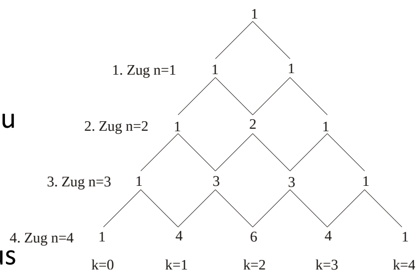
2.3 Eigenschaften der Multinomialverteilung
Erwartungswert und Varianz der Multinomialverteilung werden bestimmt und gedeutet.

Quellen:

- http://de.wikipedia.org/wiki/Binomialverteilung
- http://de.wikipedia.org/wiki/Multinomialverteilung
- Lehrbuch der Schule

Erwartungshorizont – Beispielpräsentation

Visualisierung	Begleittext
Ziehen mit Zurücklegen Präsentationsprüfung Mathematik	Mein Thema befasst sich mit dem Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne.. Zunächst sind Kugeln mit zwei verschiedenen Farben in der Urne, dann *drei oder* mehr Farben.
Gliederung 1) Die Binomialverteilung – Baumdiagramm – Binomialkoeffizienten – Formel und Beispielrechnungen 2) Urne mit drei Farben – Baumdiagramm – Beispielrechnungen für 2 Mal ziehen – Die Multinomialverteilung – *Eigenschaften der Multinomialverteilung*	Für zwei verschiedene Farben benötigt man die Binomialverteilung, die in den ersten drei Folien mit Baumdiagramm, Binomialverteilung und allgemeiner Formel behandelt wird. Sind drei oder mehr Farben in der Urne, so wird die Multinomialverteilung verwendet, die im zweiten Teil untersucht wird.
Baumdiagramm der Binomialverteilung 	Beim Baumdiagramm zur Binomialverteilung gehen von jedem Zustand immer zwei Pfade aus, die immer links und rechts dieselben Wahrscheinlichkeiten haben. Da nur die Anzahl der roten oder blauen Kugeln betrachtet wird und nicht die Reihenfolge, werden Pfade, die zu denselben Anzahlen gehören, zusammengeführt . So entsteht dieses typische Baumdiagramm, das auch die Struktur des Pascaldreiecks entspricht.

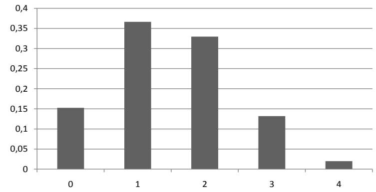
Visualisierung	Begleittext
	Anforderungsbereich I
Binomialkoeffizienten • Anzahl der Pfade, die im Baumdiagramm zu einem Zustand führen. • Anzahl der Möglichkeiten, aus n verschiedenen Objekten k auszuwählen.  $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$	Im Pascaldreieck stehen die Binomialkoeffizienten in Dreiecksform angeordnet. In den Zeilen wird die Anzahl der Züge gezählt, in den Diagonalspalten die Anzahl der roten Kugeln. Jede Zahl im Pascaldreieck ist die Summe der beiden Zahlen darüber, da die Anzahl der Pfade zu einem Punkt gerade durch die Anzahl der Pfade zu den beiden darüber liegenden Punkte bestimmt ist, man kann ja nur von dort her kommen. Gleichzeitig sind die Binomialkoeffizienten die Anzahl der Möglichkeiten, aus n verschiedenen Objekten k auszuwählen. Dies passt folgendermaßen Zusammen: Wenn man n Schritte durch das Baumdiagramm geht, muss man k mal links abbiegen (von oben nach unten gesehen). Man muss also aus n Kreuzungen k auswählen, an denen man abbiegt. Die Formel mit den Fakultäten kann man sich am Lotto-Beispiel 6 aus 49 klar machen: Für die erste gezogene Zahl hat man 49 Möglichkeiten, für die zweite 48 usw. bis 44 Möglichkeiten für die sechste Zahl. Dies muss man multiplizieren und erhält $49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44=\frac{49!}{43!}\hat{=}\frac{n!}{(n-k)!}$. Da es nicht auf die Reihenfolge ankommt, in der die Kugeln gezogen werden, muss noch durch die Anzahl der möglichen Reihenfolgen also $6!\hat{=}k!$ geteilt werden und man hat die Formel für die Binomialkoeffizienten. Anforderungsbereich II

<table>
<tr><th>Visualisierung</th><th>Begleittext</th></tr>
<tr><td>

Formel und Beispiel

- Die Formel für die Wahrscheinlichkeit, bei n Zügen k rote Kugeln zu ziehen, wenn Rot die Wahrscheinlichkeit p hat, lautet: $b_{n,k,p}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
- Damit ergeben sich in unserem Beispiel:

<table>
<tr><th>k</th><th>P</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0,15258789</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0,36621094</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,32958984</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,13183594</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,01977539</td></tr>
</table>



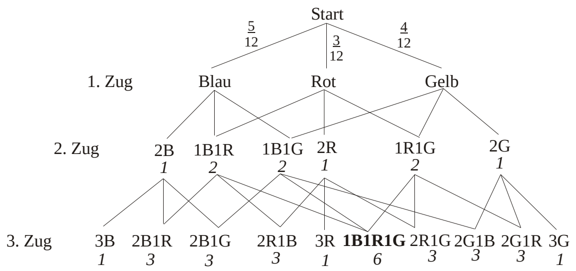
</td><td>

Die Wahrscheinlichkeit zu einem Punkt im Baumdiagramm zu kommen ist über alle Pfade gleich groß. Da man entlang des Pfades multiplizieren muss, hat man k Mal den Faktor p und (n-k) mal den Faktor (1-p). Der Zugehörige Binomialkoeffizient liefert die Anzahl der Pfade und muss daher als weiterer Faktor auftreten. Berechnet man für n=4 die Wahrscheinlichkeiten so erhält man die abgebildete Verteilung.
Diese ist nicht symmetrisch sondern linkslastig, weil der Erwartungswert für die Anzahl der roten Kugeln $ER=n\cdot p=1,5$ ist.

Anforderungsbereich II

</td></tr>
<tr><td>

Drei Farben - Baumdiagramm



Beispielrechnungen: $P(2B1R)=3\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{12}\right)^1$

$P(1B1R1G)=6\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{12}\right)^1\cdot\left(\frac{4}{12}\right)^1$

</td><td>

Bei drei Farben ist das Baumdiagramm nicht so gleichmäßig aufgebaut, wie bei der Binomialverteilung und wird schnell unübersichtlich. Wenn man die Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Pfadregeln bestimmt, erkennt man jedoch Regelmäßigkeiten: Wie bei der Binomialverteilung treten die gleichen Wahrscheinlichkeitspotenzen auf, nur dass es jetzt drei sind, *für noch mehr Farben wären es entsprechend mehr Faktoren.*

Anforderungsbereich II – III

</td></tr>
</table>

Visualisierung	Begleittext
Multinomialverteilung • Die Multinomialverteilung verallgemeinert die Binomialverteilung für mehr als zwei Farben. • Für drei Farben lautet die Formel: $P(k_1 \text{ Blau}; k_2 \text{ Rot}; k_3 \text{ Gelb}) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3}$ $P(\text{Blau bei 1 Zug}) = p_1$ $P(\text{Rot bei 1 Zug}) = p_2$ $P(\text{Gelb bei 1 Zug}) = p_3$ $n = k_1 + k_2 + k_3$	Wie man in den Quellen findet, wird diese Situation mit der Multinomialverteilung beschrieben, die eine Verallgemeinerung der Binomialverteilung ist. Nimmt man nur zwei Farben an, kann man sehen, dass man wieder die Formeln von oben hat, nur mit p_2 statt $(1-p)$ und k_2 statt $(n=k)$. Die Wahrscheinlichkeitspotenzen treten wie eben schon gesagt auf, statt der Binomialkoeffizienten gibt ähnliche Faktoren mit den Fakultäten, die man auch ähnlich begründen kann. Anforderungsbereich III bzw. *II-III*
Eigenschaften der Multinomialverteilung • Der Erwartungswert für die Anzahl des Ziehens einer Farbe wird ebenso berechnet, wie in der Binomialverteilung: $EX_i = n \cdot p_i$ • Die Varianz für die Anzahl des Ziehens einer Farbe wird ebenso berechnet, wie in der Binomialverteilung: $VARX_i = n \cdot p_i(1-p_i)$	*Interessanterweise sind die Formeln für den Erwartungswert und die Varianz der Multinomialverteilung identisch mit denen der Binomialveteilung. Dies liegt daran, dass man für z.B. für den Erwartungswert von Rot nur fragt: kommt Rot oder kommt nicht Rot. Gelb und Blau werden also zu einem Ereignis zusammengefasst und man hat wie in der Binomialverteilung nur zwei Zustände und daher auch die gleiche Formel für den Erwartungswert bzw. die Varianz.* *Anforderungsbereich III*

Visualisierung	Begleittext
Quellen • http://de.wikipedia.org/wiki/Binomialverteilung • http://de.wikipedia.org/wiki/Multinomialverteilung • Lehrbuch der Schule	Alle benötigte Information befindet sich auf Wikipedia bzw. in unserem Schulbuch.

- Zur Folie Baumdiagramm:
    - Wo stehen in dem Baumdiagramm alle Zustände für festes k? (Anforderungsbereich I)
    - Wie viele Enden hätte das Baumdiagramm nach dem 4. / n-ten Zug, wenn man die Enden nicht zusammenführt? (Anforderungsbereich I ggfs. II, falls im Unterricht nicht behandelt)
    - Was ändert sich gegenüber der Aufgabenstellung, wenn man ohne Zurücklegen zieht? (Anforderungsbereich III)
- Zur Folie Binomialkoeffizienten
    - Ergänzen Sie die Zeilen für n=5 und n=6 in dem Pascaldreieck. (Anforderungsbereich I)
    - Wie groß ist 100 über 0? Wie groß ist 100 über 100? (Anforderungsbereich I)
    - Wie groß ist 20 über 1? Wie groß ist 20 über 19? (Anforderungsbereich I)
    - Erläutern Sie, warum 6! die Anzahl der Möglichkeiten ist, 6 vorgegebene Kugeln beim Lotto zu ziehen. (Anforderungsbereich II)
- Zur Folie Formel und Beispiel
    - In einer Urne sind 10 rote und 15 blaue Kugeln. Sie ziehen 7 Mal mit Zurücklegen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, 4 rote Kugeln zu ziehen. (Anforderungsbereich I)
    - Betrachten Sie zu ihrem Beispiel n=100 und skizzieren Sie den Graph der Verteilung grob an der Tafel. Welche Bedeutung bekommt der Erwartungswert hier? (Anforderungsbereich III)
- Zur Folie Drei Farben Baumdiagramm
    - Berechnen Sie P(2G, 1B) (Anforderungsbereich I)
    - Wie viele Enden hätte dieses Baumdiagramm im vierten Zug? (Anforderungsbereich I)
    - Lösen Sie sich von der Ebenen Darstellung des Baumdiagramms. Wie könnte man das Baumdiagramm darstellen, so dass es systematisch und einfach wird? (Anforderungsbereich III)
- Zur Folie Multinomialverteilung
    - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P(4R, 3B, 2G) (Anforderungsbereich I)
    - Führen Sie aus was heißt „die man auch ähnlich begründen kann.“
      Bzw. Wie kann man den Faktor vor den Wahrscheinlichkeitspotenzen kombinatorisch deuten? (Anforderungsbereich III)
- Zur Folie Eigenschaften der Multinomialverteilung
    - Welche Anzahlen Erwartet man bei ihrem Beispiel bei 100 Zügen und wie streuen diese? (Anforderungsbereich II)
    - Wie ist die Varianz definiert und in welche Aussagen erlaubt sie für ein Zufallsexperiment? (Anforderungsbereich II)