Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Bildung und Sport

Schriftliche Abiturprüfung
Schuljahr 2007/2008

Grundkurs Mathematik

Gymnasien, Gesamtschulen, Berufliche Gymnasien

14. Februar 2008, 9.00 Uhr

Unterlagen für die Lehrerinnen und Lehrer – Haupttermin

Diese Unterlagen sind <u>nicht</u> für die Prüflinge bestimmt.

Diese Unterlagen enthalten:

1 Allgemeines
2 Rückmeldebogen
3 Hinweise für die Auswahl der Aufgaben
4 Hinweise zum Korrekturverfahren
5 Aufgaben, Erwartungshorizonte und die Bewertung für jede Aufgabe

1 Allgemeines

- Weisen Sie bitte die Schülerinnen und Schüler auf die allgemeinen Arbeitshinweise am Anfang der Schülermaterialien hin.
- Die Schülerinnen und Schüler kennzeichnen ihre Unterlagen <u>nur mit der Kursnummer und ihrer Schülernummer</u>, nicht mit ihrem Namen.
- Die Arbeitszeit beträgt **240 Minuten.**
- Erlaubte Hilfsmittel: Nichtprogrammierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, Formelsammlung „Das große Tafelwerk interaktiv“, Cornelsen-Verlag, Operatorenliste, Rechtschreiblexikon.

2 Rückmeldebogen für die Zweitkorrektur

Bitte umgehend ausfüllen und an BM 3 faxen!

Institut für Bildungsmonitoring
BM 3

Fax 42 79 67-006

Schulchiffre:

Aufgabenstatistik und Information für die Zweitkorrektoren

in Fächern mit zentraler Aufgabenstellung

Fach: Mathematik, Grundkurs **Kurs-Nummer:** ________________

Bearbeitet wurden die folgenden Aufgaben:

Aufgabe Nr.	Anzahl	
I.1	von	Prüflingen
I.2	von	Prüflingen
II.1	von	Prüflingen
II.2	von	Prüflingen
III.1	von	Prüflingen
III.2	von	Prüflingen

Datum: _______________

Unterschrift: __________________________________

3 Aufgabenauswahl

- Sie erhalten **sechs** Aufgaben – **I.1, I.2** (Analysis) und **II.1, II.2** (Lineare Algebra/Analytische Geometrie) und **III.1, III.2** (Stochastik).
- Sie wählen **zwei Aufgaben** aus, davon eine Aufgabe aus dem **Sachgebiet I** (Analysis) und eine Aufgabe aus dem **Sachgebiet II** (Lineare Algebra/Analytische Geometrie) bzw. dem **Sachgebiet III** (Stochastik). Beide Aufgaben reichen Sie an die Schülerinnen und Schüler weiter.
- Sie überprüfen gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Vollständigkeit der Arbeitsunterlagen.
- Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten beide Aufgaben.
- Sie vermerken auf der Reinschrift, welche Aufgabe sie bearbeitet haben.

4 Korrekturverfahren

- Die Korrekturen werden gemäß der „Richtlinie für die Korrektur und Bewertung der Prüfungsleistungen im schriftlichen Teil der Abiturprüfung“ vorgenommen.
- Die Bewertung und Benotung der Arbeiten wird auf einem gesonderten Blatt vorgenommen, siehe Anlagen „Bewertungsbögen für die Erst- und die Zweitkorrektur“ (S. 4 und 5).
- Die Bewertungsbögen verbleiben in der Schule.
- Die Originale der Schülerarbeiten werden zusammen mit dem Bewertungsbogen für die Zweitkorrektur und einer Kursliste, die nur die Schülernummern enthalten darf, sowie einem Exemplar der Lehrermaterialien zu einem Päckchen gepackt.
- Zu den Zeitvorgaben, Warnmeldungen und dem weiteren Verlauf des Verfahrens siehe den „Ablaufplan für die Durchführung der schriftlichen Prüfungen“.

Bei der Korrektur der Schülerarbeiten kann es aufgrund von unterschiedlichen didaktischen Konzepten oder Verkürzungen aufgrund von Verabredungen zu unterschiedlichen Bewertungen von Schülerleistungen kommen, insbesondere im formalen Bereich. Bisher ließen sich solche unterschiedlichen Sichtweisen im Gespräch zwischen Referent und Korreferent klären.

Im Abitur mit zentralen Anteilen ist eine solche Klärung wegen des anonymisierten Korrekturverfahrens nicht möglich. Deshalb ist insbesondere aufseiten des Korreferenten ein sensibles Vorgehen gefordert. Auch wenn der Korreferent eine andere Korrektheit von seinen Schülerinnen und Schülern fordern würde, sollte er darauf achten, ob der Referent bei seinen Korrekturen <u>durchgängig</u> anders vorgegangen ist. Es gilt der Grundsatz, dass die Schülerinnen und Schüler durch unterschiedliche Sichtweisen nicht benachteiligt werden dürfen.

Die Lösungsskizzen in den Erwartungshorizonten zu den einzelnen Aufgaben geben Hinweise auf die erwarteten Schülerleistungen. Oft sind aber Lösungsvarianten möglich, die in der Skizze nur zum Teil beschrieben werden konnten. Grundsätzlich gilt deshalb, dass alle Varianten, die zu richtigen Lösungen führen, mit voller Punktzahl bewertet werden, unabhängig davon, ob die gewählte Variante in der Lösungsskizze aufgeführt ist oder nicht.

5 Aufgaben, Erwartungshorizonte und Bewertungen

Erwartungshorizont:

Kursiv gedruckte Passagen sind Hinweise an die korrigierenden Lehrkräfte. Sie sind nicht Bestandteile der erwarteten Schülerleistung.

Bewertung:

Jeder Aufgabe sind 100 Bewertungseinheiten (BWE) zugeordnet, insgesamt sind also 200 BWE erreichbar. Bei der Festlegung von Notenpunkten gilt die folgende Tabelle.

Bewertungs-einheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte
≥ 190	≥ 95 %	15
≥ 180	≥ 90 %	14
≥ 170	≥ 85 %	13
≥ 160	≥ 80 %	12
≥ 150	≥ 75 %	11
≥ 140	≥ 70 %	10
≥ 130	≥ 65 %	9
≥ 120	≥ 60 %	8

Bewertungs-einheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte
≥ 110	≥ 55 %	7
≥ 100	≥ 50 %	6
≥ 90	≥ 45 %	5
≥ 80	≥ 40 %	4
≥ 66	≥ 33 %	3
≥ 52	≥ 26 %	2
≥ 38	≥ 19 %	1
< 38	< 19 %	0

Die Note „ausreichend“ (5 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss mindestens eine Teilaufgabe, die Anforderungen im Bereich II aufweist, vollständig und weitgehend richtig bearbeitet worden sein.

Die Note „gut“ (11 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden sind. Dabei muss die Prüfungsleistung in ihrer Gliederung, in der Gedankenführung, in der Anwendung fachmethodischer Verfahren sowie in der fachsprachlichen Artikulation den Anforderungen voll entsprechen. Ein mit „gut“ beurteiltes Prüfungsergebnis setzt voraus, dass neben Leistungen in den Anforderungsbereichen I und II auch Leistungen im Anforderungsbereich III erbracht worden sind.

Bei erheblichen Mängeln in der sprachlichen Richtigkeit sind bei der Bewertung der schriftlichen Prüfungsleistung je nach Schwere und Häufigkeit der Verstöße bis zu drei Notenpunkte abzuziehen. Dazu gehören auch Mängel in der Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen sowie falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text.

Abiturprüfung 2008

Bewertungsbogen Erstkorrektur

Schulchiffre			**BeBo EKo M**
Fach	Mathematik	**Schüler-Nummer**	
Kurstyp	GK		
Kurs-Nummer			

Aufgaben Nummer (z.B. I.2) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)								BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	
								Summe der BWE →	

Bewertungstext

Notenpunkte →

Dieser Bogen kann auch aus dem Internet unter **www.hera.bbs.hamburg.de** mit dem Anmeldenamen **abschluss** und dem Passwort **pruefung** zum rechnergestützten Ausfüllen heruntergeladen werden.

Abiturprüfung 2008

Bewertungsbogen Zweitkorrektur

Schulchiffre			**BeBo ZKo M**
Fach	Mathematik	**Schüler-Nummer**	
Kurstyp	GK		
Kurs-Nummer			

Aufgaben Nummer (z.B. I.2) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)								BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	
								Summe der BWE →	

Bewertungstext

Notenpunkte →

Dieser Bogen kann auch aus dem Internet unter **www.hera.bbs.hamburg.de** mit dem Anmeldenamen **abschluss** und dem Passwort **pruefung** zum rechnergestützten Ausfüllen heruntergeladen werden.

ANALYSIS 1

I.1 Pflanzschalen

Eine Glashütte stellt eine Serie hochwertiger großer farbiger Pflanzschalen her, die in der Form alle ähnlich sind, etwa so wie in der nebenstehenden Abbildung gezeigt.

Die einzelnen Modelle der Serie unterscheiden sich aber in der Breite ihrer Silhouette (Seitenansicht).

Diese Seitenansichten lassen sich gut beschreiben durch Funktionen f_a mit

$$f_a(x) = a - \frac{15}{x^2}, \quad a > 0\,.$$

Für verschiedene Werte von a ergeben sich unterschiedlich breite Schalen.
Dabei ist der Boden immer **bei** $\boldsymbol{y = 0}$, und der obere Rand ist **bei** $\boldsymbol{y = 5}$.
Eine Einheit entspricht dabei 10 cm in der Realität.

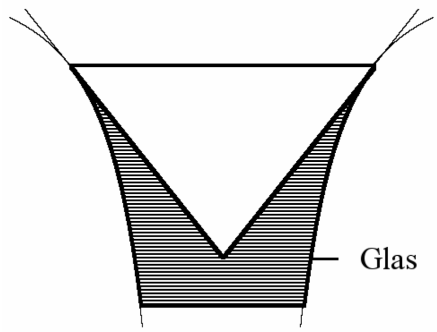
Drehen Sie das Blatt „Anlage 1" um 90° im Uhrzeigersinn. Sie sehen nun für drei verschiedene a die Seitenansichten mit in x- und in y-Richtung gleich langen Einheiten. Die waagerechten Linien in der Zeichnung markieren die Werte $y = 0$ und $y = 5$.

a) In der Anlage 1 sind die Graphen für $a = \frac{11}{2}$, $a = \frac{20}{3}$ und $a = 8$ eingezeichnet.
Ergänzen Sie eine passende Achsenbeschriftung und ordnen Sie den drei Graphen die zugehörigen Werte von a begründet zu. **15 P**

b) Berechnen Sie den Wert für a, bei dem der Durchmesser der Schale am oberen Rand genau 4 Einheiten beträgt. **10 P**

c) Begründen Sie, dass die Beschreibung der Pflanzschalen für $a < 5$ nicht sinnvoll ist.
Hinweis: Überlegen Sie, wie groß der Radius der Schale am oberen Rand sein kann. **10 P**

d) Die Pflanzschalen werden draußen vor öffentlichen Gebäuden aufgestellt und müssen besonders standfest sein. Deshalb sollen sie aus massivem Glas hergestellt werden, und der Innenraum soll kegelförmig sein.
Die nebenstehende Abbildung zeigt das Prinzip.
Die eingezeichneten geraden Mantellinien des Innenkegels (Begrenzung des Innenkegels) verlaufen am oberen Rand tangential zur Randkurve.
Bestätigen Sie, dass das Volumen des Innenkegels für $a = 7$ etwa 31 Liter beträgt.



25 P

e) Für $a = 7$ kann das Gesamtvolumen (Glas + Innenkegel) berechnet werden durch $15\pi\int_0^5 \frac{1}{7-x}\,dx$.

Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich für $a = 7$ durch das massive Glas das Innenvolumen der Pflanzschale etwa auf die Hälfte reduziert.

Hinweise:
Zeigen Sie dazu zuerst, dass $G(x) = -\ln(7-x)$ im abgeschlossenen Intervall zwischen 0 und 5 eine Stammfunktion von $g(x) = \frac{1}{7-x}$ ist.

Dabei darf als bekannt vorausgesetzt werden, dass $\frac{1}{x}$ die Ableitung von $\ln x$ ist. **15 P**

f) Begründen Sie, dass die in d) beschriebene Pflanzschalenkonstruktion mit dem massiven Glaskörper nicht mehr sinnvoll ist, wenn a zu groß wird. **10 P**

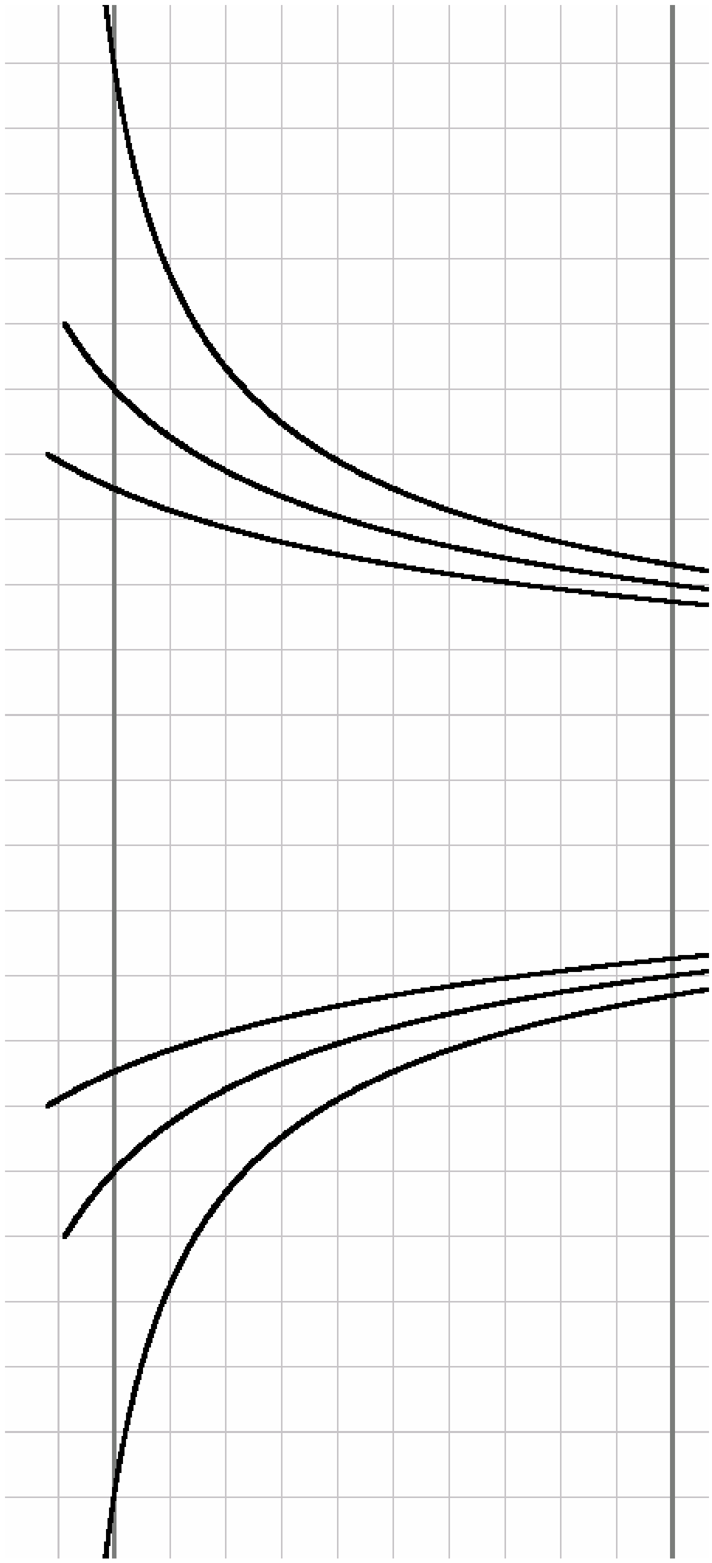
g) Die Pflanzschalen sollen zum Verkauf auf den Markt gebracht werden. Für eine bestimmte Ausführung der Pflanzschalen lassen sich die Produktionskosten K (in €) in Abhängigkeit von der Stückzahl x durch folgende Gleichung beschreiben:

$$K(x) = 0{,}05x^3 - 1{,}5x^2 + 25x + 200\,, \quad x > 0\,.$$

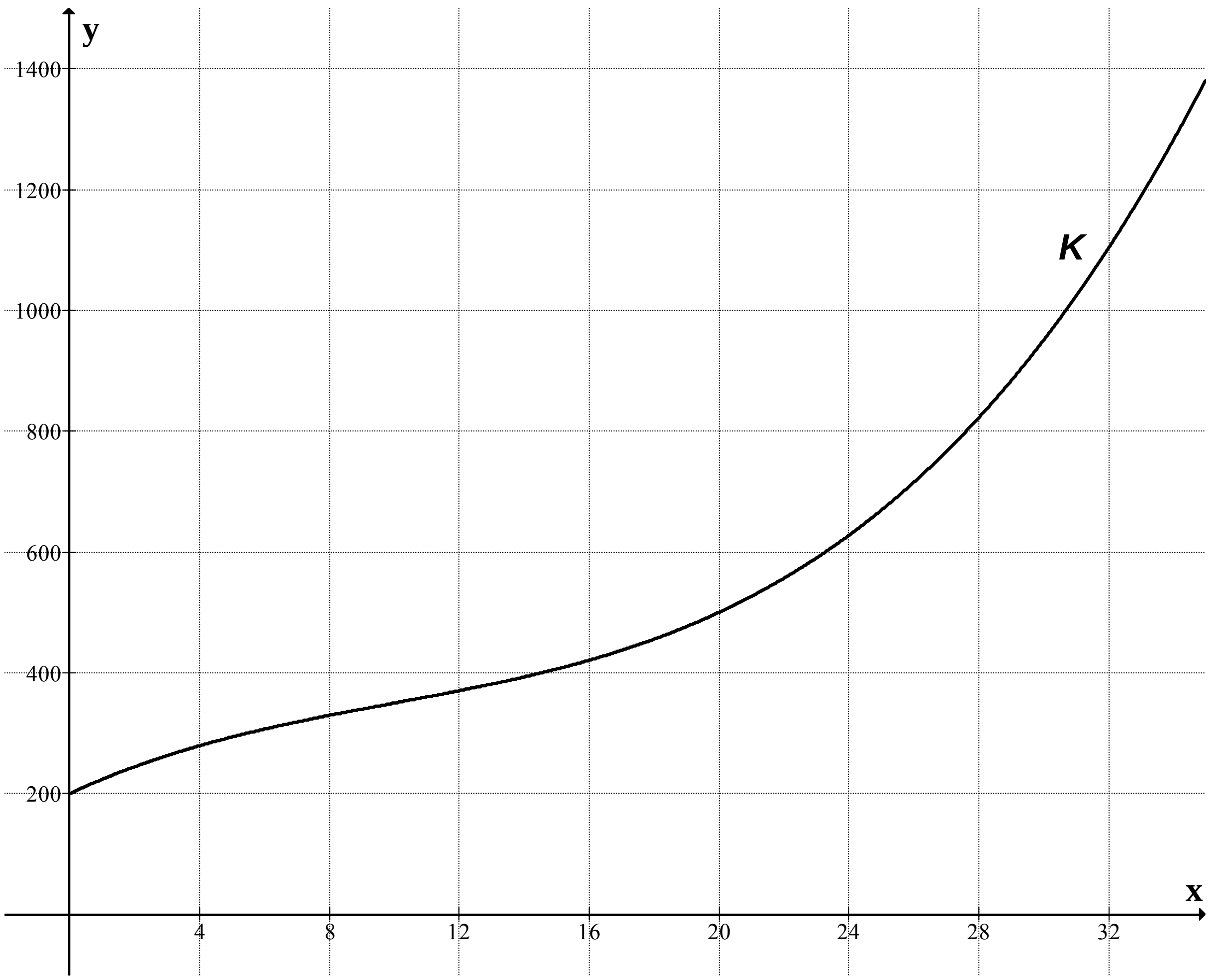
Der Graph der Funktion K ist in Anlage 2 dargestellt.

Begründen Sie, warum ein (konstanter) Mindestpreis von 25 € pro Stück nicht unterschritten werden darf, da sonst nur mit Verlust produziert werden kann. **15 P**

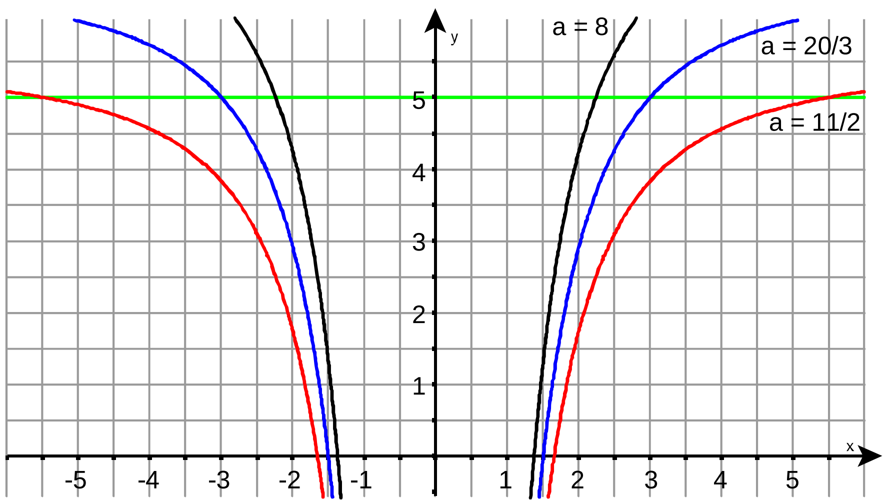
Anlage 1 zur Aufgabe „Pflanzschale“, Aufgabenteil a).



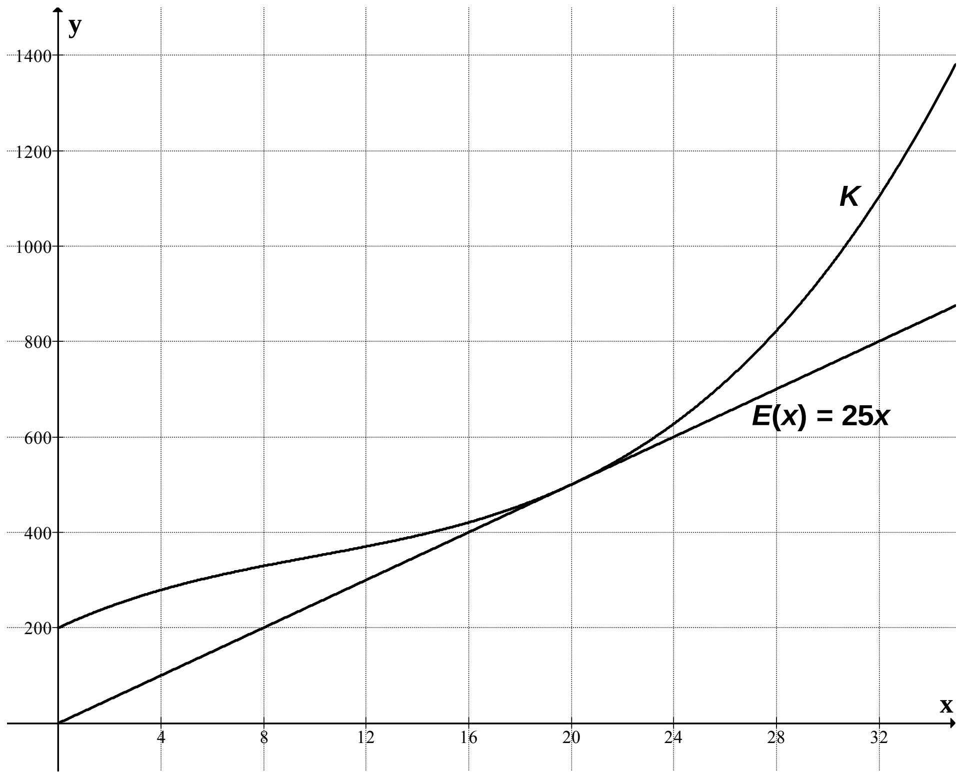
Anlage 2 zur Aufgabe „Pflanzschale“, Aufgabenteil g).



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Funktionen f_a sind offenbar alle symmetrisch zur *y*-Achse. Diese Achse muss also in der Mitte eingezeichnet werden. Der Abstand zwischen den beiden waagerechten Linien ist 5. Eine Einheit entspricht also zwei Markierungsabschnitten (Gitterabständen). Die Lage der *x*-Achse unten bei *y* = 0 und des Nullpunktes auf der *x*-Achse sind klar. Wegen der Maßstabstreue entspricht eine Einheit auf der *x*-Achse ebenfalls zwei Gitterabständen. Für $a = \frac{20}{3}$ hat die zugehörige Funktion $f_{\frac{20}{3}}$ mit $f_{\frac{20}{3}}(x) = \frac{20}{3} - \frac{15}{x^2}$ die Nullstellen $\pm\frac{3}{2}$. Aus diesem Ergebnis folgt, dass $a = \frac{20}{3}$ zum mittleren der drei Graphen gehört. Veränderung von *a* bewirkt eine Verschiebung „nach oben oder unten". Dem größten *a* (= 8) entspricht also der oberste – hier auch der innerste – Graph. Entsprechend gehört zu *a* = 5,5 der unterste, also der äußere Graph. *Andere Begründungen sind möglich.* 	10	5	
b)	Wenn der Durchmesser am oberen Rand 4 ist, muss gelten: $f_a(2) = 5 \Leftrightarrow a - \frac{15}{4} = 5 \Leftrightarrow a = \frac{35}{4} = 8{,}75$.	10		
c)	Bestimmt man den Radius des kreisförmigen oberen Randes in Abhängigkeit von *a*, muss man die Gleichung $f_a(r) = 5$ lösen, also die quadratische Gleichung $a - \frac{15}{r^2} = 5$. Man erhält die positive Lösung $r = \sqrt{\frac{15}{a-5}}$. Diese Gleichung hat nur für *a* > 5 reelle Lösungen. *Alternative Lösung:* Inhaltlich bedeutet $a \leq 5$, dass die Gerade *y* = 5 entweder Asymptote oder sogar oberhalb der Asymptoten des Graphen (Hyperbel) von f_a liegt, d.h. der Graph erreicht die vorgegebene Höhe gar nicht.		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Das Volumen eines Kegels beträgt $V=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h$. Als Radius des Innenkegels muss der Radius des oberen Randes verwendet werden. Und für die Höhe gilt: $h=5-y_0$, wobei y_0 der *y*-Achsenabschnitt einer/beider Tangenten ist. Der Radius des oberen Randes wird bestimmt durch die Schnittpunkte zwischen der Geraden $y=5$ und dem Graphen von f_7. $f_7(x)=5 \Leftrightarrow 7-\frac{15}{x^2}=5 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{15}{7-5}}=\pm\sqrt{7{,}5}$. Die Gleichung der Tangente durch den rechten Randpunkt lautet: $t(x)=5+f_7'\left(\sqrt{7{,}5}\right)\cdot\left(x-\sqrt{7{,}5}\right)$. *<u>Bemerkung:</u> Man hätte aus Symmetriegründen natürlich auch den linken Randpunkt verwenden können.* Es gilt: $f_7'(x)=\frac{30}{x^3}$ $f_7'\left(\sqrt{7{,}5}\right)=\frac{30}{7{,}5\cdot\sqrt{7{,}5}}$ $f_7'\left(\sqrt{7{,}5}\right)=\frac{4}{\sqrt{7{,}5}}$ Durch Einsetzen erhält man: $t(x)=5+\frac{4}{\sqrt{7{,}5}}\cdot\left(x-\sqrt{7{,}5}\right)=5+\frac{4}{\sqrt{7{,}5}}\cdot x-4=\frac{4}{\sqrt{7{,}5}}\cdot x+1$. Von dieser Geraden interessiert nur der *y*-Achsenabschnitt, d.h. das Absolutglied 1. Dieses bestimmt durch $h=5-1=4$ direkt die Höhe des gesuchten Innenkegels. Damit sind alle Maße des zu berechnenden Kegels bestimmt. $V=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\sqrt{7{,}5}\right)^2\cdot 4=10\pi\approx 31{,}4$. *Hinweis:* *Dieses Ergebnis ist sogar unabhängig von a für 5 < a < 7,5. Man erhält stets ca. 31 Liter für das Innenvolumen.*		25	
e)	Für die Ableitung von *G* erhält man unter Berücksichtigung der Kettenregel: $G'(x)=-\frac{1}{7-x}\cdot(-1)=\frac{1}{7-x}$. Genau das war zu zeigen.		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Somit gilt: $15\pi\int_0^5 \frac{1}{7-x}\,dx = 15\pi\left[-\ln(7-x)\right]_0^5 = 15\pi\left(-\ln(2)+\ln(7)\right) \approx 59$. 31 Liter ist ungefähr die Hälfte von 59 Liter, d.h. durch das massive Glasunterteil wird das Volumen etwa auf die Hälfte reduziert.			
f)	Wenn a zu groß wird, dann wird die Tangente so steil, dass der y-Achsenabschnitt y_0 negativ wird, d.h. die Höhe des Innenkegels wird größer als 5. Dies bedeutet, dass die Schale unten ein kreisförmiges Loch bekommt und der innere Hohlraum zu einem Kegelstumpf wird. Das ergibt sich aus der Rechnung von d), ist aber auch qualitativ erkennbar an den Zeichnungen auf der Anlage, insbesondere für $a = 8$. *Auch für eine derartige Lösung ist die volle Punktzahl zu erteilen.*			10
g)	<u>1. Lösungsvariante</u> (zeichnerische Lösung): Der Mindestpreis von 25 € pro Stück soll bestätigt werden. Zu zeigen ist, dass der Graph der Erlösfunktion E mit $E(x) = 25x$ Tangente des Graphen der Kostenfunktion K ist.  Offensichtlich berühren sich die beiden Graphen an der Stelle $x = 20$. $E(20) = 25 \cdot 20 = 500$. $K(20) = 0{,}05 \cdot 20^3 - 1{,}5 \cdot 20^2 + 25 \cdot 20 + 200 = 500$.		5	10

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Produktionskosten und Erlös sind an der Stelle $x = 20$ gleich. Bei einer Produktions- und Absatzmenge von 20 Stück (pro Tag) deckt ein Mindestpreis von 25 € pro Stück gerade die Produktionskosten. 2. Lösungsvariante (über die Berechnung des Stückkostenminimums): $K(x) = 0{,}05x^3 - 1{,}5x^2 + 25x + 200, \quad x > 0$. $k(x) = \frac{0{,}05x^3 - 1{,}5x^2 + 25x + 200}{x} = 0{,}05x^2 - 1{,}5x + 25 + \frac{200}{x}$. $k'(x) = 0: \quad 0{,}1x - 1{,}5 - \frac{200}{x^2} = 0$ $0{,}1x^3 - 1{,}5x^2 - 200 = 0$ $x^3 - 15x^2 - 2000 = 0$ $(x-20)(x^2 + 5x + 100) = 0$ Diese Gleichung hat genau eine reelle Lösung, nämlich $x = 20$. $k''(x) = 0{,}1 + \frac{400}{x^3} > 0$ für alle $x > 0$. Stückkosten $k(20) = 20 - 30 + 25 + 10 = 25$. Bei einer Produktions- und Absatzmenge von 20 Stück deckt erst ein Mindestpreis von 25 € pro Stück gerade die Gesamtkosten pro Stück..			
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

ANALYSIS 2

I.2 Medikation

Nach Einnahme eines Medikamentes kann man dessen Konzentration im Blut eines Patienten messen. Für die ersten 6 Stunden beschreibt die Funktion f mit der Gleichung $f(t) = 10t \cdot e^{-0,5t}$ die im Blut vorhandene Menge des Medikamentes in Milligramm pro Liter in Abhängigkeit von der Zeit *t*. Nach 6 Stunden erfolgt der Abbau näherungsweise linear (siehe Anlage).

a) Berechnen Sie die maximale Konzentration im Blut und den Zeitpunkt, zu dem sie vorhanden ist. **20 P**

b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Medikament am stärksten abgebaut wird. **10 P**

c) Der lineare Abbau nach 6 Stunden wird näherungsweise durch die Tangente *k* am Graphen von *f* im Punkt $(6 \mid f(6))$ beschrieben. Bestimmen Sie die Geradengleichung der Tangente und damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament unter dieser Annahme vollständig abgebaut ist. **15 P**

d) Beschreiben Sie, wie Sie die mittlere Konzentration des Medikamentes bis zum vollständigen Abbau berechnen würden. Bestimmen Sie eine grobe Abschätzung dieser mittleren Konzentration, z. B. mithilfe der Grafik in der Anlage. **15 P**

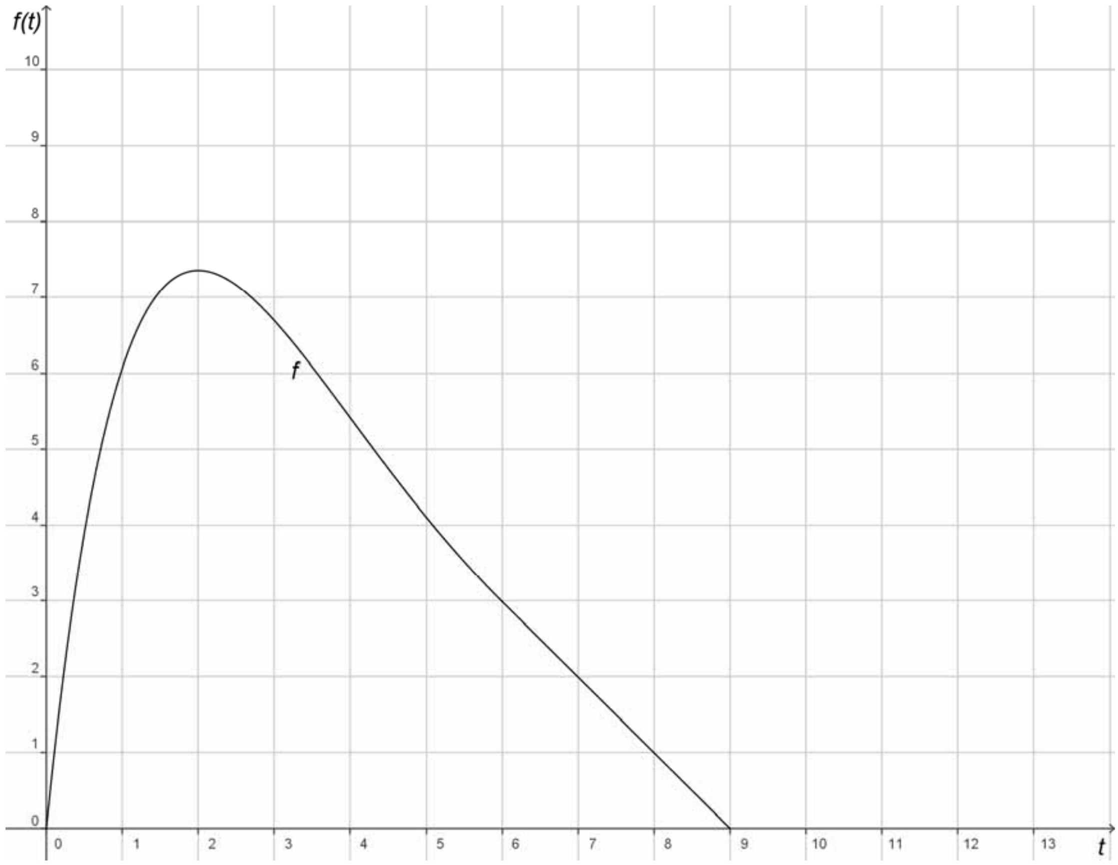
e) Ein Patient nimmt das Medikament 4 Stunden nach der ersten Einnahme in gleicher Dosierung ein weiteres Mal ein. Nehmen Sie in einem vereinfachenden Modell an, dass sich die Konzentrationen im Blut dieses Patienten addieren und dass der Abbau (und damit auch der Übergang in die „lineare Zone“) für beide Medikationen unabhängig voneinander erfolgt.
Skizzieren Sie zur Grafik in der Anlage die Darstellung der Gesamtkonzentration bis zum vollständigen Abbau nach dem eben beschriebenen Modell. **15 P**

f) Ein Patient muss mit starken Nebenwirkungen rechnen, wenn die Konzentration des Medikamentes im Blut 10 Milligramm pro Liter übersteigt.
Entscheiden Sie, ob der Patient aus Aufgabenteil e) gefährdet ist. **10 P**

Um das Medikament in seiner Wirksamkeit zu verbessern, verändert der Hersteller seine Zusammensetzung. Die Konzentration des Medikamentes im Blut wird wieder durch eine Funktion der Form $g(t) = a \cdot t \cdot e^{-b \cdot t}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ beschrieben. *t* ist wiederum die Zeit in Stunden nach der Einnahme und $g(t)$ wird in der Einheit $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ (Milligramm pro Liter) gemessen.

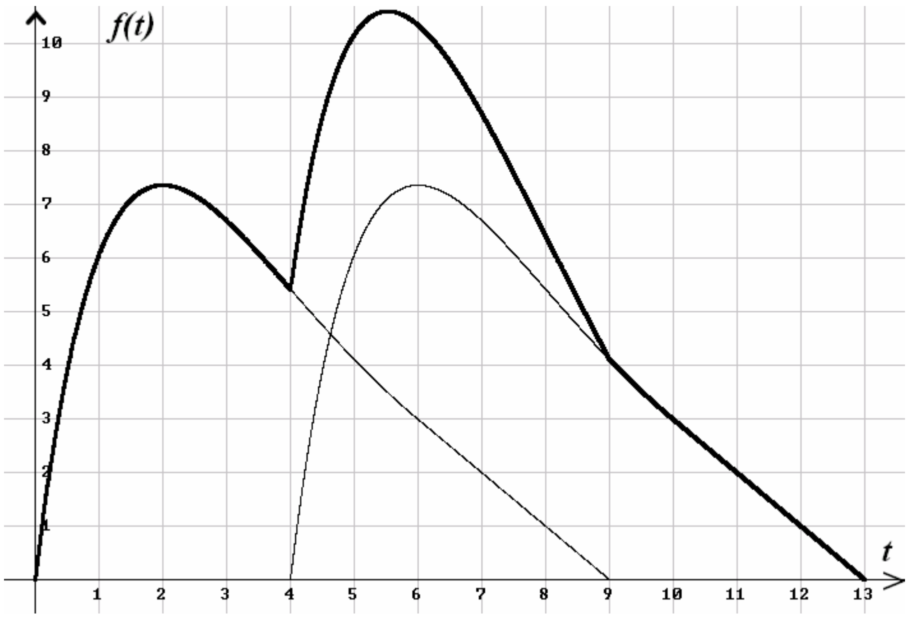
g) Bestimmen Sie die Konstanten *a* und *b*, wenn die Konzentration genau vier Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert von 10 $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ erreichen soll. **15 P**

Anlage zur Aufgabe „Medikation“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Die höchste Konzentration im Blut ist an der Stelle, an der der Graph der Funktion f mit der Gleichung $f(t)=10t\cdot e^{-0{,}5t}$ einen Hochpunkt hat. Es muss also gelten: $f'(t)=0$ mit $f'(t)=10e^{-0{,}5t}-5t\cdot e^{-0{,}5t}$. Somit erhält man $t = 2$. Dem Verlauf des Graphen in der Anlage ist zu entnehmen, dass dies nur ein Maximum sein kann. $f(2)=10\cdot 2\cdot e^{-0{,}5\cdot 2}\approx 7{,}36$. Die höchste Konzentration ist also nach 2 Stunden vorhanden und beträgt 7,36 Milligramm pro Liter.	20		
b)	Der stärkste Abbau entspricht der betragsmäßig größten Steigung nach dem Maximum des Graphen der Funktion f. Sie wird im Wendepunkt von f angenommen. Also muss gelten: $f''(t)=0$ mit $f''(t)=-10e^{-0{,}5t}+2{,}5t\cdot e^{-0{,}5t}$. Damit ergibt sich $t = 4$. Das Medikament wird nach vier Stunden am stärksten abgebaut.		10	
c)	Der lineare Verlauf wird durch die Geradengleichung $k(t)= f(6)+ f'(6)\cdot(t-6)$ beschrieben. Es gilt: $f'(t)=(10-5t)\cdot e^{-0.5\cdot t}$. Einsetzen ergibt: $k(t)=60\cdot e^{-3}-20\cdot e^{-3}\cdot(t-6)$ $=180\cdot e^{-3}-20t\cdot e^{-3}$ $=-20\cdot e^{-3}\cdot\left(t-9\right)$. Die Nullstelle von k liegt also bei 9, d. h. dass das Medikament nach 9 Stunden vollständig abgebaut ist.		15	
d)	Die mittlere Konzentration des Medikamentes berechnet man folgendermaßen: $\frac{1}{9}\cdot\int_0^9 f(t)\mathrm{d}t$. Eine grobe Abschätzung erhält man z. B. durch Auszählen einerseits der Anzahl n der Kästchen, die ganz in der zugehörigen Fläche liegen, und andererseits der Anzahl m der Kästchen, die von 0 bis 9 vom Graphen geschnitten werden. Man bekommt: $n = 27$ und $m = 19$. Der gesuchte Mittelwert lässt sich damit grob abschätzen durch $\left(n+\frac{m}{2}\right):9=\left(27+\frac{19}{2}\right):9=4{,}055...$. Die Abschätzung sollte zwischen 3,5 Milligramm pro Liter und 4,5 Milligramm pro Liter liegen.		10	5

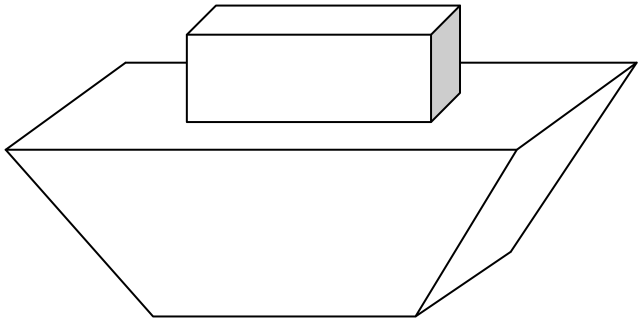
<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>

<u>Bemerkung zur grafischen Darstellung:</u> Eine genaue Darstellung der „Überlagerungsfunktion“ ist etwas diffizil, da ja mehrere Definitionsintervalle in Fallunterscheidungen zu betrachten sind, je nachdem bei welcher Funktion der exponentielle oder der lineare Teil wirkt. Das wird nicht erwartet (wenn auch in der obigen Musterskizze geschehen). Wichtig ist die Struktur des Graphen und dass es einen relevanten Zeitraum gibt, in dem die 10-mg/l-Grenze überschritten wird.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Da die Konzentration zeitweilig die Grenze von 10 Milligramm pro Liter übersteigt, muss der Patient mit starken Nebenwirkungen rechnen.
Zur Begründung könnte man
- entweder am Graphen argumentieren
- oder zeigen, dass z. B. bei $t = 6$ der Wert $f(t) + f(t-4) \approx 10{,}34$ über 10 liegt (die linearen Teile kommen hier noch nicht ins Spiel)
- oder argumentieren, dass das Maximum rechts von $t = 4$ liegen muss, dass also die Funktion $f(t) + f(t-4)$ betrachtet werden muss, die ihre Extremstelle bei $t = \frac{2(3e^2+1)}{e^2+1} \approx 5{,}52$ hat mit dem Maximalwert von ungefähr 10,60 (auch hier kommen die linearen Teile noch nicht ins Spiel).</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>g)</td><td>$g(t) = a \cdot t \cdot e^{-bt}$
$g'(t) = a \cdot e^{-bt} - abt \cdot e^{-bt}$
Da die Konzentration bei $t = 4$ am größten sein soll, gilt: $g'(4) = 0$.
$0 = a \cdot e^{-4b} - 4ab \cdot e^{-4b}$
$a = 4ab \qquad | : a \ (a \neq 0)$
$b = \frac{1}{4}$
Einsetzen in $g(4) = 4a \cdot e^{-4b}$ mit $g(4) = 10$ ergibt: $a = 2{,}5e = 6{,}7957...$.
Also gilt: $a \approx 6{,}80$ und $b = 0{,}25$.</td><td></td><td></td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

LA / AG 1

II.1 Abenteuerspielplatz



Der Gemeinderat beschließt, einen eher langweiligen Spielplatz zu einem Abenteuerspielplatz umzugestalten. Das Motto lautet „Auf hoher See“. Daher soll ein Piratenschiff inmitten des Geländes die neue Attraktion werden.

In einem kartesischen Koordinatensystem lässt sich die Grundfläche des Schiffes beschreiben durch die Eckpunkte

$$A_1(0 \mid 0 \mid 0),\ B_1(3 \mid 0 \mid 0),\ C_1(3 \mid 5 \mid 0),\ D_1(0 \mid 5 \mid 0)$$

und das Deck durch die Eckpunkte

$$A_2(0 \mid -1 \mid 2),\ B_2(3 \mid -1 \mid 2),\ C_2(3 \mid 6 \mid 2),\ D_2(0 \mid 6 \mid 2).$$

Die Koordinaten sind zugleich als Längenangaben in Metern zu lesen.

Auf dem Deck wird ein quaderförmiger, oben offener Aufbau – genannt Kommandobrücke – errichtet, der an allen Seiten 1 m Abstand zum Rand des Decks hat und 0,75 m hoch ist.
Die aus Sicherheitsgründen notwendige Reling rund um das Deck wird in dieser Aufgabe vernachlässigt.

a) Zeichnen Sie ein Schrägbild des Piratenschiffes in das Koordinatensystem in der Anlage.
Geben Sie dort die Koordinaten der oberen Ecken des Aufbaus an. **15 P**

Von den alten Spielgeräten gibt es auf dem Spielplatz Betonfundamente in den Punkten $G(6 \mid 11 \mid 0)$ und $H(-3 \mid 8 \mid -1)$.
Von G zu C_2 und von H zu D_2 sollen Kletterstangen angebracht werden, die das Entern des Piratenschiffes ermöglichen und damit den Spielwert erhöhen.

b) Berechnen Sie die Länge der beiden Kletterstangen. **10 P**

Da kleine Kinder es nicht schaffen, an den Stangen an Deck zu klettern, treten die Eltern an den Gemeinderat heran und fordern, dass zwischen den beiden Stangen eine ebene Holzwand mit Grifflöchern so angebracht wird, dass die beiden Stangen die Begrenzung der Holzwand bilden.

c) Begründen Sie, warum der Wunsch der Eltern schon allein aus mathematisch-geometrischen Gründen nicht erfüllt werden kann. **15 P**

Der Gemeinderat bietet den Eltern an, zwischen den Kletterstangen ein Netz mit den Ecken C_2, D_2, G und H spannen zu lassen.

d) Der Flächeninhalt des gespannten Netzes lässt sich näherungsweise durch die Summe der Flächeninhalte der beiden Dreiecke GC_2H und HC_2D_2 bestimmen. Für das Dreieck HC_2D_2 wurde bereits ein Flächeninhalt von etwa 5,4 m^2 ermittelt. Zeigen Sie, dass der zu erwartende Materialverbrauch für das Netz etwa 27 m^2 beträgt. **10 P**

Durch den Rumpf des Schiffes werden aus großen Kunststoffröhren zwei Klettertunnel T_1 und T_2 gebaut.
Zunächst werden die Mitten der Röhren als Teile von Geraden dargestellt (ohne Beachtung des Durchmessers der Röhren).

Der Tunnel T_1 beginnt in $P(3 \mid 2{,}5 \mid 0{,}5)$ und endet in $Q(0 \mid 2{,}5 \mid 0{,}5)$.

Der Tunnel T_2 ist Teil der Geraden $g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 5{,}25 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -6{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$.

e) Beschreiben Sie unter Berücksichtigung der folgenden Punkte, wie die beiden Klettertunnel das Piratenschiff „durchtunneln“:

- Weisen Sie nach, dass die beiden „Tunnel-Geraden“ sich nicht schneiden.
- Zeigen Sie, dass der Tunnel T_2 im Boden der Kommandobrücke endet.
- Ermitteln Sie, ob für den Tunnel T_2 die maximal zulässige Steigung von 30° gegenüber der Schiffsbodenebene nicht überschritten wird. **30 P**

f) Die Tunnelröhren werden in verschiedenen Durchmessern angeboten.
Beschreiben Sie ohne Rechnung, wie der maximale Durchmesser ermittelt werden kann. **10 P**

g) Die Tunnelröhren sollen mit einem Durchmesser von 1 m eingebaut werden.
Die Eltern beschließen, für die Einstiegsluke und die Ausstiegsluke jeweils einen Deckel anfertigen zu lassen. Dazu bestellen sie vier kreisförmige Holzdeckel mit dem Durchmesser von jeweils 1 m. Beurteilen Sie das Vorhaben. **10 P**

Anlage zur Aufgabe „Abenteuerspielplatz“

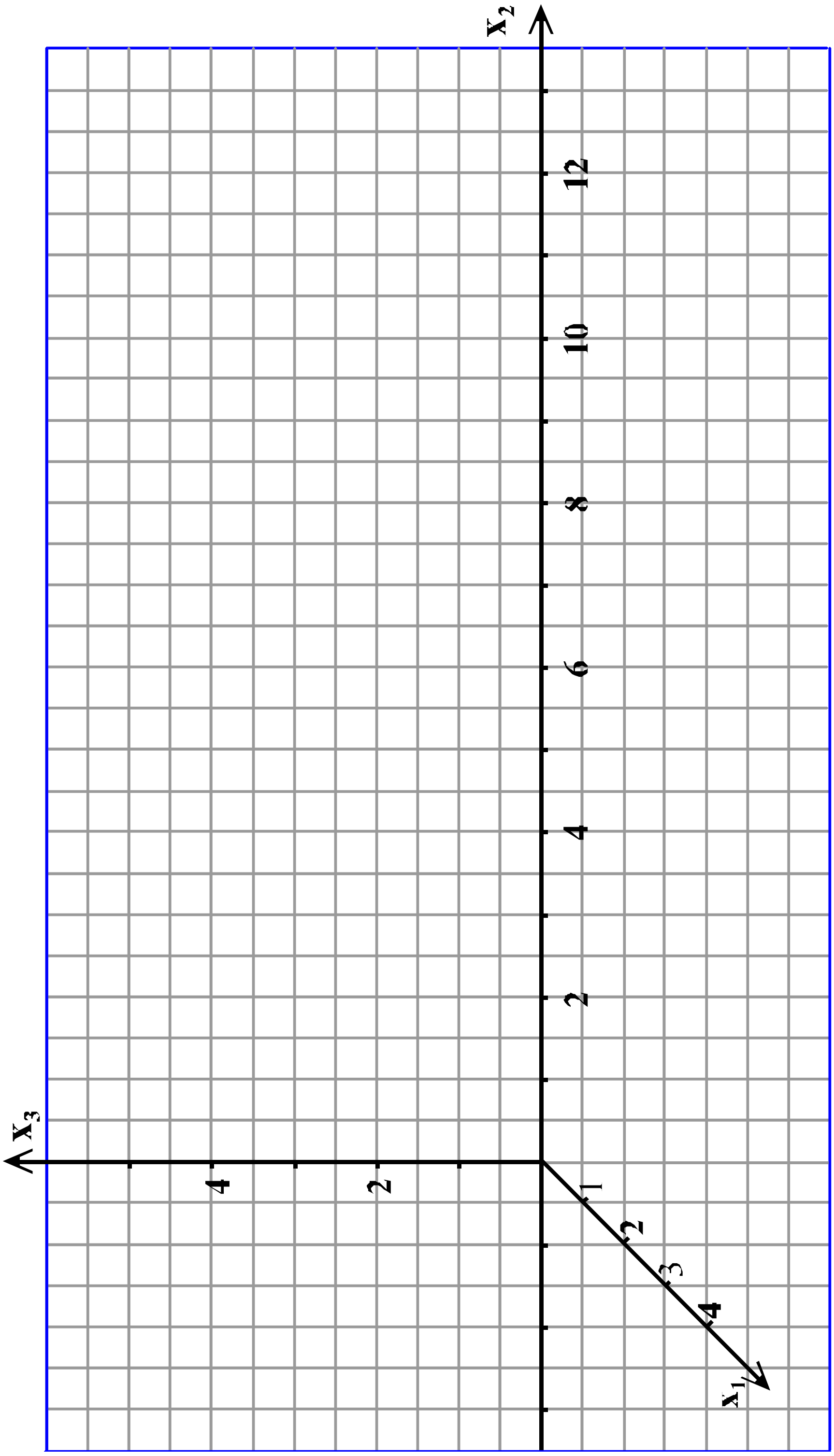
Code Nr: ______________________

$A_1\,(0|0|0)$, $B_1\,(3|0|0)$, $C_1\,(3|5|0)$, $D_1\,(0|5|0)$

$A_2\,(0|-1|2)$, $B_2\,(3|-1|2)$, $C_2\,(3|6|2)$, $D_2\,(0|6|2)$

$A_3\,(\ \ |\ \ |\ \ )$, $B_3\,(\ \ |\ \ |\ \ )$, $C_3\,(\ \ |\ \ |\ \ )$, $D_3\,(\ \ |\ \ |\ \ )$

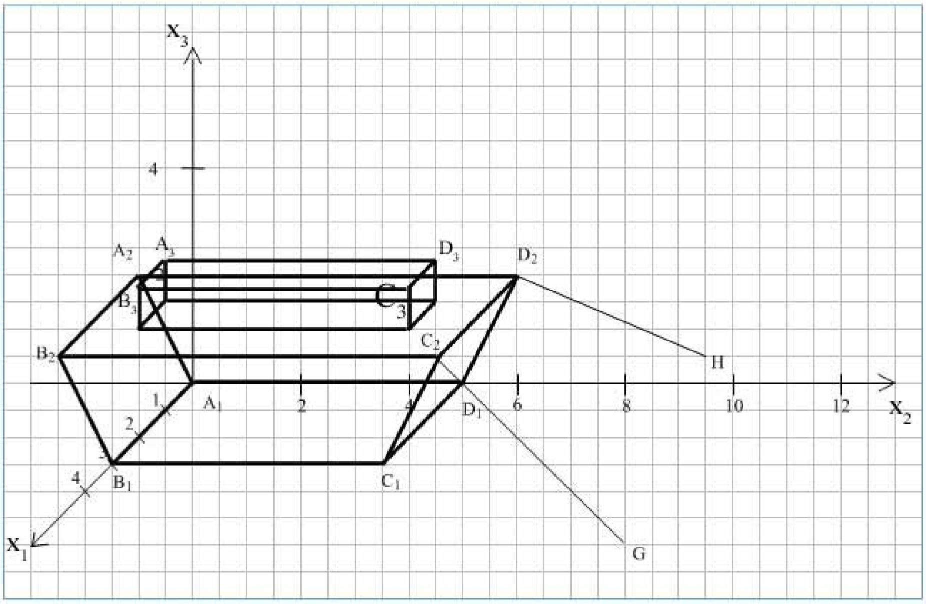
Auf allen Koordinatenachsen soll gelten: 1 LE entspricht 1 m



Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

Die Koordinaten lassen sich direkt den Angaben in der Aufgabenstellung entnehmen: $A_3(1|0|2{,}75)$, $B_3(2|0|2{,}75)$, $C_3(2|5|2{,}75)$, $D_3(1|5|2{,}75)$.



Das Einzeichnen der Kletterstangen ist nicht Bestandteil der Aufgabenstellung und deshalb zum Erreichen der vollen Punktzahl nicht notwendig.

</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Die Länge der Stange zwischen G und C_2 entspricht der Länge des Vektors $\overrightarrow{GC_2}$, Entsprechendes gilt für die Länge der Stange zwischen H und D_2.

$|\overrightarrow{GC_2}| = \sqrt{(3-6)^2+(6-11)^2+(2-0)^2} = \sqrt{38} \approx 6{,}16$.

Die Länge der Stange zwischen G und C_2 beträgt ungefähr 6,20 m.

$|\overrightarrow{HD_2}| = \sqrt{(0-(-3))^2+(6-8)^2+(2-(-1))^2} = \sqrt{22} \approx 4{,}70$.

Die Länge der Stange zwischen H und D_2 beträgt ungefähr 4,70 m.

</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Um zu zeigen, dass der Wunsch der Eltern nicht erfüllt werden kann, ist zu zeigen, dass die vier Punkte C_2, D_2, G und H nicht in einer Ebene liegen.

Um dies zu überprüfen, stellt man die Gleichung einer Ebene auf, in der drei der gegebenen Punkte liegen, und überprüft, ob der vierte Punkt ebenfalls auf dieser Ebene liegt. Dies sei hier exemplarisch für die Ebene, die durch die Punkte C_2, D_2 und G aufgespannt wird, gezeigt.

Eine Gleichung der Ebene lautet:

$E: \vec{x} = \overrightarrow{OC_2} + r \cdot \overrightarrow{C_2D_2} + s \cdot \overrightarrow{C_2G}$, $r, s \in \mathbb{R}$.

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \; r, s \in \mathbb{R}$$

Nun ist noch zu zeigen, dass H nicht auf dieser Ebene liegt:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \; r, s \in \mathbb{R}$$

führt zu einem leicht lösbaren Gleichungssystem, in dem es ausreicht, die beiden letzten Zeilen zu untersuchen:

$$\begin{array}{ll} (II) & 8 = 6 + 5s \\ (III) & -1 = 2 - 2s \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ll} (II) & s = 0{,}4 \\ (III) & s = 1{,}5 \end{array}$$

Dies führt zu einem Widerspruch, der Punkt H liegt also nicht in der Ebene E. Es ist somit nicht möglich, eine ebene Holzwand zwischen den beiden Stangen anzubringen.

Alternativ kann auch gezeigt werden, dass die Gerade durch G und C_2 und die Gerade durch H und D_2 windschief sind.

II: 15

d) Der Flächeninhalt des Dreiecks GHC_2 ist zu bestimmen. Eine Möglichkeit ist die Verwendung der Formel $A_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$, wobei γ der von a und b eingeschlossene Winkel ist.

Es sei a die Länge der Strecke $\overline{GH}$, also $a = |GH|$, und $b = |GC_2|$. Dann gilt

$$|GH| = \sqrt{(-3-6)^2 + (8-11)^2 + (-1-0))^2} = \sqrt{91}.$$

Die Länge $|GC_2|$ ist in Aufgabe b) mit $\sqrt{38}$ ermittelt worden.

Zu bestimmen ist noch die Größe des eingeschlossenen Winkels $\gamma = |\sphericalangle\ HGC_2|$:

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GC_2}}{|\overrightarrow{GH}| \cdot |\overrightarrow{GC_2}|} = \frac{\begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{91} \cdot \sqrt{38}} = \frac{40}{\sqrt{91} \cdot \sqrt{38}} = 0{,}680...$$

$$\gamma = 47{,}139...$$

Mit Hilfe dieser Angaben lässt sich nun die Fläche des Dreiecks GHC_2 bestimmen:

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

$$A_{\triangle GHC_2} = \frac{1}{2} \cdot \left|GH\right| \cdot \left|GC_2\right| \cdot \sin\left|\sphericalangle HGC_2\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{91} \cdot \sqrt{38} \cdot \sin 47{,}139° \approx 21{,}55...$$

Zusammen mit dem (bekannten) Flächeninhalt des zweiten Dreiecks werden ca. 21,6 m² + 5,4 m² = 27 m² Material benötigt.

Es gibt noch weitere Möglichkeiten, den Flächeninhalt näherungsweise zu bestimmen, die ebenfalls zur vollen Punktzahl führen können.

</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

- Um nachzuweisen, dass die beiden Geraden sich nicht schneiden, muss man zunächst eine Gleichung der Geraden *h* durch die Punkte *P* und *Q* aufstellen:

$$h: \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + s \cdot \overrightarrow{QP}\ ,\ s \in \mathbb{R}\,,$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ s \in \mathbb{R}\,.$$

Nun setzt man die Gleichungen der beiden Geraden gleich und erhält ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Variablen:

$$\begin{aligned} 3s &= 1{,}5 \\ 6{,}5r &= 2{,}75 \\ 3r &= 0 \end{aligned}$$

Die beiden letzten Zeilen dieses Gleichungssystems widersprechen sich. Die zweite Zeile ergibt $r = -\frac{11}{26}$, die dritte hingegen $r = 0$. Die Geraden haben also keinen gemeinsamen Punkt.

- Um zu zeigen, dass der zweite Tunnel im Boden der Kommandobrücke endet, ist einerseits der Schnittpunkt der Geraden *g* mit der Ebene, die durch das Deck beschrieben wird, zu berechnen. Zum anderen muss überprüft werden, ob dieser Schnittpunkt innerhalb des vorgegebenen Rechtecks der Kommandobrücke liegt.

Die Deckebene ist parallel zur x_1x_2-Ebene und liegt bei $x_3 = 2$. Die Ebenengleichung lässt sich beispielsweise folgendermaßen darstellen:

$$E_{Deck}: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Durch Gleichsetzen mit der Gleichung der Geraden *g* erhält man folgendes Gleichungssystem:

</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>
$$\begin{aligned} x_1 &= 1{,}5 \\ x_2 &= 5{,}25 - 6{,}5r \\ 2 &= 0{,}5 + 3r \end{aligned}$$
Aus der ersten Zeilen folgt direkt $x_1 = 1{,}5$. Mit Hilfe der dritten Zeile erhält man $r = 0{,}5$. Eingesetzt in die zweite Zeile ergibt sich $x_2 = 5{,}25 - 0{,}5 \cdot 6{,}5$, also $x_2 = 2$.

$S(1{,}5\,|\,2\,|\,2)$ ist somit der Schnittpunkt der Geraden mit der „Deck“-Ebene. Da dieser Punkt in x_3 -Richtung auf der Höhe der Ebene liegt, in x_1 -Richtung genau in der Mitte des Piratenschiffes und in x_2 -Richtung 3 m vom linken Rand des Decks entfernt liegt, endet der Tunnel innerhalb der Kommandobrücke.

• Der Neigungswinkel des zweiten Tunnels gegenüber der Schiffsbodenebene lässt sich mit Hilfe des Tangens berechnen. Dies ist möglich, da die x_1 -Koordinate des Richtungsvektors Null ist.
$\tan\alpha = \frac{3}{6{,}5} \quad \rightarrow \quad \alpha \approx 24{,}8^\circ$.
Da die zulässige Steigung maximal 30° betragen soll und 24,8° < 30° ist, ist die 30°-Bedingung erfüllt.

Eine Lösung mit Hilfe des Normalenvektors ist auch möglich und zum Erreichen der vollen Punktzahl ausreichend.
</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Um den maximalen Durchmesser zu ermitteln, muss man den Abstand zwischen den beiden Geraden *g* und *h* ermitteln. Der Röhrendurchmesser inklusive der doppelten Dicke des Materials, aus dem die Röhren hergestellt sind, darf diesen Wert nicht überschreiten.

Unter der Annahme zweier gleich dicker Röhren ist der maximale Radius r_{max} die Hälfte des minimalen Abstandes d_{min},, also $r_{max} = 0{,}5 \cdot d_{min}$.

Der maximale Durchmesser der Röhren ist dann doppelt so groß, entspricht also dem minimalen Abstand.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>g)</td><td>Die Querschnitte der zylindrischen Tunnel sind Kreisflächen. Die Tunnel müssten senkrecht zu den „Austrittsflächen“ des Schiffes verlaufen, dann wären die Austrittsöffnungen“ der Tunnel kreisförmig. Dies gilt aber nicht für beide Tunnel. Wegen des in Teilaufgabe e) berechneten Neigungswinkels von g_2 gegen die Schiffsbodenebene, also auch Ebene der Kommandobrücke, liegt bei dieser Austrittsöffnung eine elliptische Form vor. Mit den bestellten kreisförmigen Holzdeckeln wird man nicht alle Öffnungen der Tunnel verschließen können.</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td align="right">Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

LA / AG 2

II.2 Schwarzwild

Das Schwarzwild ist in vielen Teilen Europas seit geraumer Zeit auf dem Vormarsch und es häufen sich landwirtschaftliche Schäden. Verursacht wird dieses enorme Wachstum durch die hohe Fortpflanzungsleistung dieser Art. Unter günstigen Bedingungen, d. h. bei gutem Futterangebot, gebären beim Schwarzwild bereits die Frischlinge (Wildschweine im ersten Lebensjahr) zu einem hohen Anteil. Zusätzlich verringert sich ihre Sterblichkeit über die Wintermonate, und auch die Fruchtbarkeit der reifen Bachen (weibliche Wildschweine, älter als zwei Jahre) steigt. An diesem Punkt kommt der Mensch ins Spiel: Vor allem durch die Landwirtschaft, aber auch durch falsche Fütterung, werden ungewollt Nahrungsquellen für das Schwarzwild verfügbar gemacht. Damit kommt es zwangsläufig zu einem dramatischen Anwachsen der Bestände.

In dieser Aufgabe werden nur weibliche Wildschweine betrachtet. Diese werden in drei Altersklassen eingeteilt.

F: Frischlinge (höchstens ein Jahr alt)
U: Überläuferbachen (älter als ein Jahr bis maximal zwei Jahre alt)
B: reife Bachen (älter als zwei Jahre)

Eine Population weiblicher Wildschweine wird durch einen Populationsvektor $\begin{pmatrix} F \\ U \\ B \end{pmatrix}$ beschrieben.

a) Für eine Population gilt:
Die jährliche Geburtenrate bei Frischlingen beträgt 0,13, bei Überläuferbachen 0,56 und bei reifen Bachen 1,64.
Von den Frischlingen überleben jährlich 25 %, von den Überläuferbachen 56 % und von den reifen Bachen 58 %.
Stellen Sie in einem Übergangsgraphen die Entwicklung dieser Population dar. **10 P**

b) Entscheiden Sie, welche der Matrizen A, B, C die in a) dargestellte Entwicklung des Schwarzwildes beschreibt.

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}56 & 0{,}58 \\ 0{,}13 & 0{,}56 & 1{,}64 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0{,}13 & 0{,}56 & 1{,}64 \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}56 & 0{,}58 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0{,}13 & 0{,}56 & 1{,}64 \\ 0 & 0{,}56 & 0{,}58 \\ 0{,}25 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Begründen Sie auch für die beiden anderen Matrizen, warum sie zur Modellierung hier nicht geeignet sind. **20 P**

Die Werte aus a) beruhen auf Untersuchungen von Schwarzwild, das unter ungünstigen Bedingungen lebt. Die Winter sind lang und streng, nicht immer ist genug Futter vorhanden. Die folgenden Matrizen *P* und *Q* hingegen beschreiben die Entwicklung von Wildschweinpopulationen unter gemäßigten bzw. guten Lebensbedingungen.

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}59 & 1{,}76 & 2{,}29 \\ 0{,}52 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}60 & 0{,}71 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0{,}26 & 0{,}94 & 1{,}93 \\ 0{,}33 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}40 & 0{,}66 \end{pmatrix}$$

c) Entscheiden Sie, welcher der beiden Matrizen *P* oder *Q* gemäßigte Lebensbedingungen für Wildschweine und welcher gute Lebensbedingungen für Wildschweine zugrunde liegen. **10 P**

Die folgenden Aufgabenteile d) bis h) beziehen sich auf die Matrix *P*.

d) Eine weibliche Wildschweinpopulation setzt sich zum Untersuchungszeitpunkt aus 60 Frischlingen, 23 Überläuferbachen und 17 reifen Bachen zusammen.
Berechnen Sie mit Hilfe der Populationsmatrix *P* die Population nach einem Jahr und aus diesem Ergebnis die Population nach einem weiteren Jahr unter den gleichen Lebensbedingungen. **10 P**

e)
- Berechnen Sie P^2 und runden Sie die Elemente dieser Matrix auf zwei Nachkommastellen.
- Bestätigen Sie durch Nachrechnen, dass man auch mit Hilfe von P^2 den Wildschweinbestand aus Aufgabenteil d) nach zwei Jahren bestimmen kann. **10 P**

f) Begründen Sie allein im Sachkontext und unabhängig von der Rechnung in e), warum P^2 keine Null enthalten darf. **15 P**

g) Der Bestand nach 10 Jahren kann mit Hilfe der Matrix P^{10} bestimmt werden.
Für die 10. Potenz der Matrix *P* gilt:

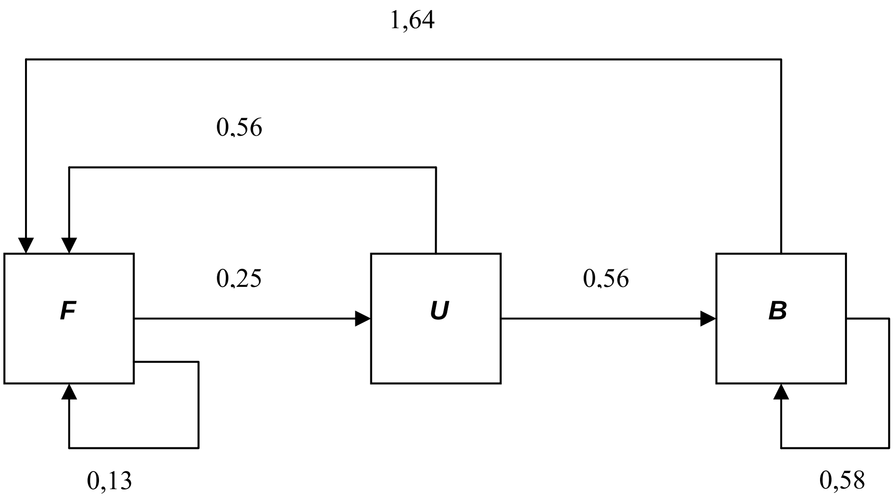
$$P^{10} \approx \begin{pmatrix} 61 & 122 & 152 \\ 19 & 39 & 49 \\ 13 & 25 & 32 \end{pmatrix}.$$

Bestätigen Sie, dass bei ungestörtem Wachstum unter gleich bleibenden Lebensbedingungen die Ausgangspopulation von 100 Wildschweinen (s. Aufgabenteil d)) nach 10 Jahren auf mehr als 13 500 Tiere anwächst. **5 P**

Auch ohne menschliche Eingriffe sind gleich bleibende Lebensbedingungen über Jahre hinweg unrealistisch; das Schwarzwild könnte sich wegen der Futter- und Raumnot nicht ungehindert vermehren. Trotzdem würden die Bestände zunächst dramatisch wachsen.
Um die Populationen konstant zu halten, werden Wildschweine von den Jagdpächtern geschossen. Zu beachten ist dabei, dass reife Bachen in der Sozialstruktur von Wildschweingruppen eine wichtige Rolle spielen. Ohne sie würden heranwachsende Frischlinge „ausrasten“.

h) Bestimmen Sie eine Population, auf die der in Aufgabenteil d) beschriebene Bestand durch Abschuss reduziert werden könnte, sodass im nächsten Jahr die Population wiederum nur auf insgesamt 100 weibliche Tiere anwächst. Lassen Sie zehn alte Bachen und zehn Überläuferbachen am Leben. **20 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)		5	5	
b)	Die Matrix *B* beschreibt die in a) beschriebene Entwicklung. In der ersten Zeile finden sich die Geburtenraten für die einzelnen Altersstufen. In der zweiten Zeile steht die Überlebensrate der Frischlinge, in der dritten Zeile stehen die Überlebensraten der Bachen. Mögliche Argumente gegen *A* und *C* sind: Matrix *A* ist nicht geeignet, da danach nur die Frischlinge Nachwuchs bekommen. Laut Matrix *C* würden Frischlinge im nächsten Jahr sofort zu reifen Bachen.		20	
c)	Gute Lebensbedingungen führen zu höheren Fortpflanzungs- und Überlebensraten. Alle von Null verschiedenen Elemente von *P* sind größer als die entsprechenden von *Q*. Also liegen *P* gute, *Q* gemäßigte Lebensbedingungen zugrunde.		10	
d)	$\begin{pmatrix} 0,59 & 1,76 & 2,29 \\ 0,52 & 0 & 0 \\ 0 & 0,60 & 0,71 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 23 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 114,81 \\ 31,2 \\ 25,87 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 115 \\ 31 \\ 26 \end{pmatrix}.$ Nach einem Jahr besteht die Population aus 115 Frischlingen, 31 Überläuferbachen und 26 reifen Bachen. $\begin{pmatrix} 0,59 & 1,76 & 2,29 \\ 0,52 & 0 & 0 \\ 0 & 0,60 & 0,71 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 115 \\ 31 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 181,95 \\ 59,8 \\ 37,06 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 182 \\ 60 \\ 37 \end{pmatrix}.$ Nach zwei Jahren ist die Population auf 182 Frischlinge, 60 Überläuferbachen und 37 reife Bachen angewachsen.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Runden Prüflinge die Werte immer ab oder rechnen sie mit den ungerundeten Werten weiter, so ist die volle Punktzahl zu geben.
Werden die Ergebnisse in den Antwortsätzen nicht gerundet, so führt dies zu einem Abzug von einem Punkt.</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>$\begin{pmatrix} 0,59 & 1,76 & 2,29 \\ 0,52 & 0 & 0 \\ 0 & 0,60 & 0,71 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,59 & 1,76 & 2,29 \\ 0,52 & 0 & 0 \\ 0 & 0,60 & 0,71 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,26 & 2,41 & 2,98 \\ 0,31 & 0,92 & 1,19 \\ 0,31 & 0,43 & 0,50 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1,26 & 2,41 & 2,98 \\ 0,31 & 0,92 & 1,19 \\ 0,31 & 0,43 & 0,50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 23 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 181,69 \\ 59,99 \\ 36,99 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 182 \\ 60 \\ 37 \end{pmatrix}$
Man erhält also dieselben Werte wie in d).</td><td>5</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>P^2 beschreibt den Übergang einer Population auf das übernächste Jahr.
Nullen stehen in einer Populationsmatrix nur dort, wo es keinen Übergang von einer Altersklasse in eine andere gibt. Dies ist bei P^2 nirgends der Fall. Denn:
Die erste Zeile der Matrix beschreibt die Geburtenraten, mit denen die Anzahl der Frischlinge im übernächsten Jahr berechnet werden. Dies ist die „Enkelgeneration“ der Ausgangspopulation, alle drei Altersstufen F, U und B gehören zur „Großmüttergeneration“.
Mit der zweiten Zeile berechnet man die Anzahl der Überläuferbachen im übernächsten Jahr, die um ein Jahr gealterten „Kinder“ der Ausgangspopulation.
Mit der dritten Zeile wird die Anzahl der alten Bachen bestimmt. Nach zwei Jahren sind auch ehemaligen Frischlinge zu reifen Bachen herangewachsen, ebenso die Überläuferbachen.</td><td></td><td></td><td>15</td></tr>
<tr><td>g)</td><td>$\begin{pmatrix} 61 & 122 & 152 \\ 19 & 39 & 49 \\ 13 & 25 & 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 23 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9050 \\ 2870 \\ 1899 \end{pmatrix}$
Die Population würde nach diesem Modell also in der Tat auf mehr als 13 500 Tiere anwachsen.</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>h)</td><td>Gesucht sind ganzzahlige x, F, U und B, sodass
$\begin{pmatrix} 0,59 & 1,76 & 2,29 \\ 0,52 & 0 & 0 \\ 0 & 0,60 & 0,71 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ U \\ B \end{pmatrix}$ mit $F + U + B = 100$.
Hieraus ergibt sich das Gleichungssystem
$\begin{array}{llll} 0,59x & + 17,6 + 22,9 & = F & \text{(I)} \\ 0,52x & + & = U & \text{(II)} \\ & \quad 6 \;+\; 7,1 & = B & \text{(III)} \end{array}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Aus (III) folgt: $B = 13$ und damit $F + U = 87$ (I) + (II) : $1{,}11x + 40{,}5 = F + U$ Insgesamt ergibt sich $1{,}11x = 46{,}5$ und daraus $x \approx 41{,}89$. Die gesuchte Population besteht also aus 42 Frischlingen, 10 Überläuferbachen und 10 reifen Bachen.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

STOCHASTIK 1

III.1 Sicherheitssystem

In der Firma Gammamobil sollen die Produktionsabläufe automatisch überwacht werden.

Zuerst betrachten wir die Firma Betasecure, die die Überwachungsgeräte herstellt und gleichzeitig ihre Zulieferfirma Alfatronic, die die verwendeten elektronischen Bauteile herstellt.

a) Ein Überwachungsgerät besteht aus 30 Bauteilen ($T_1, \ldots, T_{30}$). Das Überwachungsgerät ist nur dann funktionstüchtig, wenn alle 30 Bauteile einwandfrei arbeiten. Die Wahrscheinlichkeit, dass es nicht funktioniert, beträgt nach dem Zusammenbau für jedes einzelne Bauteil 2 %. Diese 30 Ausfallereignisse werden dabei als stochastisch unabhängig voneinander betrachtet.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eines solches Überwachungsgerät nicht funktioniert. **10 P**

b) Das Ergebnis von a) ist sehr unbefriedigend, deshalb wird ein verbessertes Überwachungsgerät entwickelt. Dabei werden die 30 Teile doppelt eingebaut und zwar so miteinander verschaltet, dass dann, wenn ein Teil ausfällt, das zweite baugleiche Teil dessen Funktion noch übernehmen kann.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes zusammen geschaltetes Teilepaar seine Funktion nicht erfüllt
(Ausfallwahrscheinlichkeit eines jeden Teils wie in a)).
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das neue Überwachungsgerät nach dem Zusammenbau nicht funktioniert. **10 P**

c) Die Fehler der Überwachungsgeräte entstehen in der Firma Betasecure beim Zusammenbau der Bauteile, aber auch, weil die Zulieferfirma Alfatronic fehlerhafte Bauteile liefert.
Alfatronic sichert zwar zu, dass der Ausschussanteil (Anteil an unbrauchbaren Teilen) höchstens 1 % beträgt, doch die belieferte Firma Betasecure richtet trotzdem eine eigene Qualitätskontrolle ein.
Da es zu teuer ist, bei jeder Lieferung alle Bauteile zu überprüfen, soll immer nur ein Hypothesentest durchgeführt werden. Dabei ist geplant, jeweils nur eine Stichprobe von 50 Stück zu prüfen. Da es Betasecure vor allem darauf ankommt sicherzustellen, dass die zugesicherte Ausschussquote von höchstens 1 % eingehalten wird, wählt sie als Nullhypothese die Annahme, dass diese Zusicherung **nicht erfüllt** ist, um diese dann möglichst mit einem signifikanten Ergebnis (5 % -Niveau) zu verwerfen. Wenn dies der Fall ist, soll die Lieferung akzeptiert werden.

- Begründen Sie, dass so für die Anzahl X der unbrauchbaren Teile kein passender Verwerfungsbereich angegeben werden kann, weil die Stichprobengröße dazu zu klein ist.
- Bestimmen Sie die Mindestgröße der Stichprobe mit dem dann zugehörigen Verwerfungsbereich, damit das Verfahren doch – wie geplant – durchgeführt werden kann. **10 P**

d) Nach dem Zusammenbau wird bei Betasecure jedes Überwachungsgerät noch dreimal unabhängig voneinander kontrolliert. Ein fehlerhaftes Gerät wird bei jeder Einzelkontrolle mit der Wahrscheinlichkeit 0,9 entdeckt.

- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein fehlerhaftes Gerät bei der Gesamtkontrolle nicht entdeckt wird.
- Bestimmen Sie auch die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 fehlerhaften Geräten alle entdeckt werden. **20 P**

Betrachten Sie jetzt den eigentlichen Produktionsablauf in der Firma Gammamobil, den die Überwachungsgeräte überwachen sollen. Unterstellen Sie dabei, dass die Überwachungsgeräte funktionstüchtig sind.

e) Erfahrungen haben gezeigt, dass bei 1000 Produktionsabläufen durchschnittlich 20 Störungen auftreten.
Bei den Überwachungsgeräten kann es dennoch mit Wahrscheinlichkeit 0,5 % vorkommen, dass ein Produktionsablauf ein Warnsignal erzeugt, wenn gar keine Störung vorliegt.
Es kann auch mit Wahrscheinlichkeit 1% vorkommen, dass kein Warnsignal erzeugt wird, wenn eine Störung vorliegt.

Bestätigen Sie (z.B. mit Hilfe eines Baumdiagramms), dass die Wahrscheinlichkeit,

i) dass ein Produktionsablauf durch ein Alarmsignal unterbrochen wird, ungefähr 2,5 % beträgt,

ii) dass im Falle eines Alarms gar keine Störung im Produktionsablauf vorliegt, ungefähr 20 % beträgt,

iii) dass ein Produktionsablauf gestört abläuft und das Überwachungsgerät diese Störung nicht entdeckt, ungefähr $\frac{1}{5000}$ beträgt. **30 P**

Die drei Ergebnisse geben Anlass zum Nachdenken: Sehr erfreulich ist das Ergebnis von iii), sehr unerfreulich das Ergebnis von ii). Bei Alarm wird nämlich der ganze Produktionsablauf gestoppt, was aufwendig und kostenintensiv ist. Das passiert zwar relativ selten (2,5 %), bedeutet aber dann ziemlich oft Fehlalarm (20 %).

Deshalb werden versuchsweise drei der Überwachungsgeräte gleichzeitig eingesetzt, und es wird nur dann Alarm ausgelöst, wenn mindestens zwei der Geräte eine Störung anzeigen.

f) Bestimmen Sie die beiden in e) betrachteten Wahrscheinlichkeiten ii) und iii) erneut und zwar

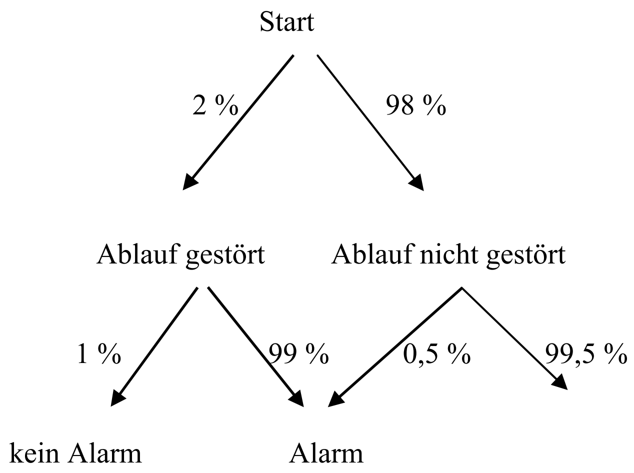
- einerseits unter der Annahme, dass das „Fehlverhalten“ der Überwachungsgeräte seine Ursachen nur in Besonderheiten der Produktionsabläufe bei Gammamobil hat und
- andererseits unter der Annahme, dass das „Fehlverhalten“ der Überwachungsgeräte nur durch zufällig und unabhängig auftretende interne Eigenschaften der Überwachungsgeräte verursacht wird. **20 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Ein Einzelgerät fällt aus, wenn mindestens ein Teil ausfällt. Dies ist das Gegenereignis dazu, dass kein Teil ausfällt. Wegen der Unabhängigkeit fällt kein Teil mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}98^{30}$ aus. Die Komplementärwahrscheinlichkeit ergibt $p(A_E) = 1 - 0{,}98^{30} \approx 45\%$.	10		
b)	• Ein zusammengeschaltetes Zwillingsmodul funktioniert nicht, wenn die beiden baugleichen Einzelteile nicht funktionieren, also mit Wahrscheinlichkeit $0{,}02^2 = 0{,}0004 = \frac{1}{2500}$. • Die gleiche Rechnung wie a) mit dem neuen Wert 0,0004 ergibt als Ausfallwahrscheinlichkeit für das neue Überwachungsgerät den Wert $1 - 0{,}9996^{30} \approx 1{,}2\%$, also eine deutliche Verbesserung.		10	
c)	• Die Anzahl X der fehlerhaften Bauteile in der Stichprobe ist 50-p-binomialverteilt. Die Nullhypothese lautet: $p > 0{,}01$. Kleine Werte von X sprechen gegen die Nullhypothese. Es sei $\{X \leq K\}$ der gesuchte Ablehnungsbereich. Für den Fehler erster Art gilt: $\alpha = P\left(X \leq K \mid H_0\right) \leq P(X \leq K \mid p = 0{,}01) = \sum_{i=0}^{K} B(50;\, 0{,}01; i)$. Es ist also der größte Wert von K gesucht, für den der rechte Term und damit α noch ≤ 5 % ist. Aber bereits für $K = 0$ erhält man: $B(50; 0{,}01; 0) = 0{,}99^{50} \approx 60\%$! Das heißt: Selbst wenn man die Lieferung nur annehmen würde (H_0 ablehnen würde), wenn <u>alle</u> 50 geprüften Teile in Ordnung sind, kann man nur garantieren, dass $\alpha \leq 60\%$. • Man erkennt aus dieser Argumentation auch, was zu tun ist, nämlich die Stichprobengröße n so groß zu wählen, dass $0{,}99^n \leq 5\%$. Dazu müsste n größer als 298 sein (das kann durch Probieren oder Logarithmieren gefunden werden), und man dürfte die Lieferung dann auch nur akzeptieren, wenn alle Bauteile in Ordnung sind, d.h. der Ablehnungsbereich ist $\{X = 0\}$.			10
d)	• Ein fehlerhaftes Gerät wird nicht entdeckt, wenn alle drei Testverfahren es nicht entdecken, also mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}1^3 = 0{,}001 = 0{,}1\%$. • Ein fehlerhaftes Gerät wird also mit 99,9 % Wahrscheinlichkeit entdeckt, alle 100 fehlerhaften Geräte werden also mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}999^{100} \approx 0{,}904... \approx 90\,\%$ entdeckt.		10 10	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>

i) Mit einem Baumdiagramm oder dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet werden.



Es gilt also $P(\text{„Alarm"}) = 0{,}02 \cdot 0{,}99 + 0{,}98 \cdot 0{,}005 \approx 2{,}5\%$.

</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

ii) Mit Hilfe des Satzes von Bayes lässt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit bestimmen (im Nenner steht dabei das Ergebnis aus i)):

St : = Störung im Ablauf.
A : = Alarmreaktion des Überwachungssystems.

$$p\left(\overline{St} \mid A\right) = \frac{p\left(\overline{St}\right) \cdot p\left(A \mid \overline{St}\right)}{p(A)} = \frac{0{,}98 \cdot 0{,}005}{0{,}02 \cdot 0{,}99 + 0{,}98 \cdot 0{,}005} \approx 20\,\% .$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass keine Störung vorliegt, obwohl das Gerät Alarm gibt, beträgt tatsächlich ca. 20 %!

</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

iii) $P(St \cap \overline{A}) = P(St) \cdot P(\overline{A} \mid St) = 0{,}02 \cdot 0{,}01 = 0{,}0002 = \dfrac{1}{5000}$.

(Im obigen Baumdiagramm ist das der Pfad „zweimal links“).

</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>

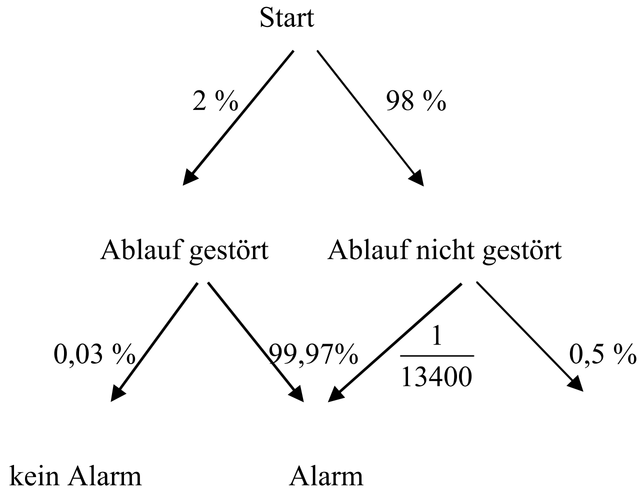
Wenn der erste Fall vorliegt, wenn also das „Fehlverhalten“ der Überwachungsgeräte seine Ursachen nur in Besonderheiten der Produktionsabläufe bei Gammamobil hat, ändert sich gegenüber e) gar nichts, die drei Geräte werden entweder alle gleichzeitig oder gar nicht reagieren, und die Antworten auf die drei Fragen bleiben unverändert.

Wenn der zweite Fall vorliegt, wenn also das „Fehlverhalten“ der Überwachungsgeräte aus zufällig und unabhängig auftretenden internen Eigenschaften der Überwachungsgeräte herrührt, müssen die Werte auf der zweiten Stufe des Baumdiagramms aus e) mit Hilfe der Binomialverteilungen
$B(3 ; 0{,}99 ; 2) + B(3 ; 0{,}99 ; 3)$ bzw. $B(3 ; 0{,}005 ; 2) + B(3 ; 0{,}005 ; 3)$
(Alarm bei mindestens zwei Reaktionen) geändert werden.

</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III

Die erste Summe beträgt ungefähr 99,97 %. Die zweite Summe ist so klein ($7{,}465 \cdot 10^{-5}$), dass man sie lieber – um eine Vorstellung zu gewinnen – durch einen Stammbruch annähern sollte, also etwa durch $\frac{1}{13400}$.



Mit diesen neuen Daten wiederholen wir die Rechnungen aus e, ii) :

ii) $p\left(\overline{St} \mid A\right) = \dfrac{0{,}98 \cdot \frac{1}{13400}}{0{,}02 \cdot 0{,}9997 + 0{,}98 \cdot \frac{1}{13400}} \approx 0{,}4\,\%$.

iii) $P(St \cap \overline{A}) = P(St) \cdot P(A \mid St) = 0{,}02 \cdot 0{,}0003 = 0{,}000006 \approx \dfrac{1}{170000}$.

Das sind beides sehr zufriedenstellende Ergebnisse. — III: 10

		I	II	III
	Insgesamt 100 BWE	30	40	30

STOCHASTIK 2

III.2 „Schwarzfahrer“

Nach Angaben des HVV beträgt der Anteil der „Schwarzfahrer“, das sind Fahrgäste, die keinen gültigen Fahrschein vorzeigen können, am gesamten Fahrgastaufkommen etwa 3 %.

Zwei Kontrolleure steigen an der Haltestelle „Berliner Tor“ in eine Bahn der Linie U3 und kontrollieren alle 25 Fahrgäste im Wagen.

An der Haltestelle „Hauptbahnhof Süd“ steigen sie um in einen Zug der Linie U1, in dem sie weitere 18 Fahrgäste kontrollieren.

Es soll vereinfachend angenommen werden, dass die Anzahl der Schwarzfahrer bei den Kontrollen binomialverteilt ist.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
- die Kontrolleure bei beiden Kontrollen zusammen genau 2 Schwarzfahrer ermitteln.
- die Kontrolleure bei den Kontrollen mindestens einen Schwarzfahrer ermitteln.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kontrolleure erst in der Linie U1 auf den ersten Schwarzfahrer treffen. **20 P**

b) Berechnen Sie, wie viele Schwarzfahrer die Kontrolleure bei ihrer oben beschriebenen Kontrolle erwarten können. **5 P**

c) Bestimmen Sie, wie viele Fahrgäste überprüft werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % mindestens ein Schwarzfahrer ermittelt wird. **15 P**

Genaue Untersuchungen zeigen, dass die Anteile der Schwarzfahrer in den verschiedenen Linien deutlich unterschiedlich sind. In der Linie U3 sind 2 % Schwarzfahrer zu erwarten, in der Linie U1 dagegen 4 %.

d) Berechnen Sie aufgrund dieser genaueren Informationen noch einmal die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kontrolleure bei der oben beschriebenen Kontrolle mindestens einen Schwarzfahrer ermitteln.
Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil a) und geben Sie Gründe für die Abweichung an. **10 P**

e) Der HVV geht davon aus, dass 10 % der Schwarzfahrer erwischt werden. Ein erwischter Schwarzfahrer muss 40 € erhöhtes Beförderungsentgelt zahlen. Besitzt er eine Zeitkarte, die er nur zu Hause vergessen hat, muss er diese innerhalb einer Woche vorzeigen und zahlt dann nur eine Bearbeitungsgebühr von 5 €. Dieser Fall trifft etwa bei der Hälfte der erwischten Schwarzfahrer zu. Gehen Sie davon aus, dass jeder nicht erwischte Schwarzfahrer im Durchschnitt entgangene Einnahmen von 3 € verursacht.
Untersuchen Sie, ob das erhöhte Beförderungsentgelt angehoben werden muss, um die erwarteten Verluste, die durch die Schwarzfahrer entstehen, auszugleichen. Die Kosten, die die Entlohnung der Kontrolleure verursacht, sollen hier unberücksichtigt bleiben.
Berechnen Sie gegebenenfalls ein erhöhtes Beförderungsentgelt, bei dem Kostendeckung zu erwarten ist. **20 P**

f) Nach einer erheblichen Preiserhöhung befürchtet der HVV, dass der durchschnittliche Anteil der Schwarzfahrer deutlich über 3 % angestiegen ist. Um diese Vermutung zu untersuchen, wird eine Großkontrolle durchgeführt, bei der 10 000 Fahrgäste kontrolliert werden.
Der HVV ist unsicher, bei welchen Ergebnissen der Großkontrolle er die oben genannten Befürchtungen als statistisch begründet ansehen sollte. Geben Sie eine Entscheidungshilfe an und begründen Sie diese. **20 P**

g) Beurteilen Sie die oben gemachte Annahme, dass die Anzahl der Schwarzfahrer binomialverteilt ist. **10 P**

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Zufallsgröße X: Anzahl der Schwarzfahrer unter den 43 kontrollierten Fahrgästen. X ist binomialverteilt mit $B_{n,p,k} = B_{43,\,0{,}03,\,x}$. • Genau 2 Schwarzfahrer werden erwischt mit der Wahrscheinlichkeit $B_{43,\,0{,}03,\,2} = \binom{43}{2} \cdot 0{,}03^2 \cdot 0{,}97^{41} \approx 0{,}233... \approx 23\,\%$. • Mindestens 1 Schwarzfahrer wird erwischt mit der Wahrscheinlichkeit $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}97^{43} \approx 0{,}73... \approx 73\,\%$. Der erste ermittelte Schwarzfahrer sitzt in der Linie U1 mit der Wahrscheinlichkeit: $B_{25;0{,}03;0} \cdot \left(1 - B_{18;0{,}03;0}\right) \approx 0{,}197 \approx 20\,\%$.	10	10	
b)	Der Erwartungswert ist $E = n \cdot p = 43 \cdot 0{,}03 = 1{,}29$. Die Kontrolleure können mit ungefähr einem Schwarzfahrer rechnen.	5		
c)	Hier gilt $1 - p(X = 0) \approx 0{,}9$. Einsetzen der Werte ergibt: $1 - 0{,}97^n \geq 0{,}9$ $0{,}97^n \leq 0{,}1$ $n \cdot \lg 0{,}97 \leq \lg 0{,}1$ $n \geq \frac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}97}$ $n \geq 75{,}595...$ Um mit 90 %-iger Sicherheit einen Schwarzfahrer zu erwischen, müssen mindestens 76 Fahrgäste kontrolliert werden.		15	
d)	Hier hilft wie in a) das Gegenereignis: $1 - 0{,}98^{25} \cdot 0{,}96^{18} \approx 0{,}711$. Diese Wahrscheinlichkeit ist deutlich niedriger als im Aufgabenteil a) (73 %). Der Grund liegt in der unterschiedlichen Anzahl der kontrollierten Fahrgäste in den beiden Linien. In der Linie U3 sind es ¼ mehr als in der Linie U1. Somit wirkt sich der geringere Anteil an Schwarzfahrern in der U3 stärker aus, als der höhere Anteil in der U1.	5	5	
e)	G bezeichnet die zusätzlichen Einnahmen bzw. Kosten des HVV, die durch Schwarzfahrer entstehen. Die Situation wird durch folgende Tabelle dargestellt: G in € | –3 | 5 | 37 $P(G)$ | 0,9 | 0,05 | 0,05 Der Erwartungswert von G ist: $E(G) = 0{,}05 \cdot 37\,€ + 0{,}05 \cdot 5\,€ - 0{,}9 \cdot 3\,€ = -0{,}60\,€$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Pro Schwarzfahrer entsteht dem HVV also durchschnittlich ein Verlust von 0,60 €. Keine Verluste entstehen, wenn $E(G) = 0$ ist. Um das zu erreichen, setzen wir für das erhöhte Beförderungsentgelt die Variable x ein und lösen die Gleichung: $0 = 0{,}05 \cdot (x-3) + 0{,}05 \cdot 5 - 0{,}9 \cdot 3$ $0{,}05 \cdot x = 2{,}6$ $x = 52$. Das erhöhte Beförderungsentgelt muss also auf 52 € erhöht werden, damit keine Verluste entstehen.	5	15	
f)	Getestet werden könnte die Nullhypothese: „Der Anteil der Schwarzfahrer liegt unverändert bei 3 % oder weniger.“ Bei einem Anteil der Schwarzfahrer von 3 % nehmen für die Kontrolle von 10000 Fahrgästen der Erwartungswert und die Standardabweichung folgende Werte an: $E = n \cdot p = 10000 \cdot 0{,}03 = 300$. $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{10000 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97} \approx 17$. Bei der Kontrolle wäre bei einem unveränderten Anteil an Schwarzfahrern mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98 % die Anzahl der Schwarzfahrer kleiner als 335. Liegt die erhobene Zahl der Schwarzfahrer über 334, so könnte man die Hypothese, dass auch nach der Fahrpreiserhöhung die Quote der Schwarzfahrer weniger oder gleich 3 % beträgt, auf dem 2 %-Niveau signifikant verwerfen. *Bemerkung: Natürlich können hier auch andere Signifikanzniveaus (z.B. 5 % oder 1 %)betrachtet werden.*		5	15
g)	Es geht um die Frage der stochastischen Unabhängigkeit des Schwarzfahrens der einzelnen Personen. Diese ist z. B. dann nicht gegeben, wenn Gruppen fahren. *Es wird eine „ergebnisoffene“ zusammenhängende Darstellung erwartet.*			10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25